UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

GABRIELA ROXANA ŞENDRUŢIU

PROPRIETĂŢI GEOMETRICE ŞI ANALITICE ALE UNOR CLASE DE FUNCŢII UNIVALENTE

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. GRIGORE ŞTEFAN SĂLĂGEAN

Cluj-Napoca
2011

Cuprins

Cuvinte cheie: funcţie univalentă, funcţie cu partea reală pozitivă, subordonare diferenţială, superordonare diferenţială, subordonare diferenţială tare, superordonare diferenţială tare, operator integral, operatorul diferenţial Sălăgean, operatorul diferenţial Ruscheweyh, convexitate, uniform convexitate, aproape convexitate de ordinul α, funcţie armonică, funcţie armonică multivalentă, inegalitate diferenţială

Introducere

Teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă reprezintă o ramură aparte a analizei complexe. Bazele acestei teorii au fost puse la începutul secolului trecut odată cu lucrările lui P. Koebe şi L. Bieberbach. Funcţiile analitice de o variabilă complexă constituie modelul ideal al transformărilor geometrice din plan.

Şcoala românească de matematică a adus contribuţii valoroase în domeniul teoriei geometrice a funcţiilor univalente. Amintim doar două personalităţi clujene şi anume pe G. Călugăreanu şi P. T. Mocanu. G. Călugăreanu, creatorul şcolii româneşti de teoria funcţiilor univalente, este primul matematician care a obţinut în 1931 condiţii necesare şi suficiente de univalenţă pe discul unitate. Cercetările iniţiate de G. Călugăreanu sunt continuate de P. T. Mocanu, care obţine rezultate importante în teoria geometrică a funcţiilor univalente: introducerea noţiunii de α-convexitate, obţinerea unor criterii de univalenţă pentru funcţii neanalitice, elaborarea în colaborare cu S. S. Miller a metodei subordonărilor diferenţiale, iar mai recent teoria superordonărilor diferenţiale. Folosirea metodei subordonărilor diferenţiale are un rol important atât în demonstrarea mult mai simplă a unor rezultate cunoscute deja şi sistematizarea acestora, cât şi în obţinerea multor rezultate noi.

În prezent există numeroase tratate şi monografii dedicate studiului funcţiilor univalente, dintre care amintim pe cele ale lui P. Montel, Z. Nehari, L. V. Ahlfors [3], Ch. Pommerenke [108], A. W. Goodman [40], P.L. Duren [32], D.J. Hallenbeck, T. H. Mac Gregor [49], S. S. Miller, P. T. Mocanu [76] şi P. T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr. Şt. Sălăgean [85].

Lucrarea de faţă prezintă un rezumat al rezultatelor obţinute în teza de doctorat. Aceasta cuprinde studiul anumitor proprietăţi geometrice, exprimate analitic, ale unor clase de funcţii analitice de variabilă complexă.

Teza se împarte în şase capitole şi o bibliografie ce conţine 136 de referinţe, dintre care 16 aparţin autoarei, 7 dintre acestea fiind scrise în colaborare.

În cele ce urmează, la fiecare capitol am selectat cele mai relevante rezultate, cu precădere cele originale. Rezultatele din primul capitol, respectiv ultimul capitol secţiunile 1-4, sunt renumerotate. În final este inclusă întreaga bibliografie.

Capitolul 1

Definiţii şi rezultate clasice

Primul capitol este structurat în 20 de secţiuni şi conţine noţiuni şi rezultate de bază din teoria geometrică a funcţiilor, care vor fi folosite în capitolele următoare.

Sunt enumerate rezultate clasice cum ar fi: teorema lui Riemann, teorema ariei, teoremele de acoperire şi de deformare pentru clasa S a funcţiilor univalente şi normate în discul unitate, conjectura lui Bieberbach precum şi câteva clase de funcţii univalente care sunt caracterizate prin proprietăţi geometrice remarcabile, exprimate analitic prin inegalităţi diferenţiale şi anume clasa funcţiilor stelate, uniform stelate, convexe, uniform convexe şi α-convexe. Ultimele 8 secţiuni sunt dedicate teoriei subordonărilor diferenţiale, cunoscută şi sub numele de "metoda funcţiilor admisibile', iniţiată şi dezvoltată de P. T. Mocanu şi S. S. Miller. Recent aceştia au introdus noţiunea de "superordonare diferenţială", ca o noţiune duală a celei de subordonare diferenţială. Subordonarea diferenţială tare, respectiv superordonarea diferenţială tare sunt concepte noi, care vin în completare.

Rezultatele acestui capitol sunt cuprinse cu precadere în lucrările "Analiză matematică (Funcţii complexe)", P. Hamburg, P. T. Mocanu, N. Negoescu, [51], "Teoria geometrică a funcţiilor univalente", P. T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr. Şt. Sălăgean, [85], "Capitole Speciale de Analiză Complexă", G. Kohr, P. T. Mocanu, [59], cât şi în lucrări ale lui S. S. Miller şi P. T. Mocanu.

1.1 Funcţii univalente

Definiţia 1.1.1 [51] O funcţie olomorfă şi injectivă pe un domeniu D din $\mathbb{C}$ se numeşte univalentă pe D.

Notăm cu $\mathcal{H}_u(D)$ mulţimea funcţiilor univalente pe D şi cu $\mathcal{H}(D)$ mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe pe domeniul D.

Noţiunea de funcţie univalentă se poate generaliza în mod natural, introducându-se noţiunea de funcţie multivalentă de ordin m, prin aceasta înţelegând o funcţie olomorfă pe D, care ia orice valoare a sa în cel mult m puncte distincte din D şi există cel puţin o valoare luată în exact m puncte distincte.

Teorema 1.1.1 [51] *Dacă $f \in \mathcal{H}_u(D)$ atunci $f'(z) \neq 0$ pentru orice $z \in D$.*

Corolarul 1.1.1 (Teorema lui Alexander) [117] *Dacă D este un domeniu convex şi $f \in \mathcal{H}(D)$ astfel încât* $\operatorname{Re} f'(z) > 0$*, pentru orice $z \in D$, atunci $f \in \mathcal{H}_u(D)$.*

1.2 Reprezentări conforme

Definiţia 1.2.1 [51] Fiind date domeniile D şi Δ din $\mathbb{C}$, o funcţie $f \in \mathcal{H}_u(D)$ astfel încât $f(D) = \Delta$ se numeşte reprezentare conformă (sau izomorfism conform) a domeniului D pe domeniul Δ. Domeniile D şi Δ se numesc conform echivalente dacă există o reprezentare conformă a lui D pe Δ. O reprezentare conformă a lui D pe el însuşi se numeşte automorfism conform al lui D. Mulţimea automorfismelor conforme ale lui D formează un grup de transformări, care se numeşte grupul conform al lui D, notat cu $A(D)$.

Teorema 1.2.1 (Riemann) [51] *Orice domeniu simplu conex D din $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, este conform echivalent cu discul unitate U.*

1.3 Clasa S. Proprietăţi

Importanţa clasei S constă în faptul că orice funcţie univalentă pe U se poate scufunda în această clasă printr-o normare convenabilă.

Pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ vom nota

$$\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}(U) : \; f(z) = a + a_n z^n + \dots\},$$

$$\mathcal{H}_n = \{f \in \mathcal{H}(U) : \; f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots\}$$

şi

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H}(U) : \; f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + \dots\},$$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

Clasa S este:

$$S = \{f \in \mathcal{H}_u(U) : \; f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad f(0) = f'(0) - 1 = 0, \quad z \in U\}.$$

Funcţia lui Koebe

$$K_\theta(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\theta} z)^2} \tag{1.3.1}$$

are un rol extremal în clasa S.

Teorema 1.3.1 [85] *Clasa S este compactă.*

1.4 Clasa Σ. Proprietăţi

Pe parcursul acestei secţiuni vom nota cu $U^- = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \ |z| > 1\}$ exteriorul discului unitate.

Notăm cu Σ clasa funcţiilor φ meromorfe cu unicul pol (simplu) $\zeta = \infty$ şi univalente în exteriorul discului unitate, care admit dezvoltarea în serie Laurent la ∞ de forma

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

Studiul funcţiilor meromorfe şi univalente se poate face paralel cu clasa S considerând clasa Σ. Funcţiile din Σ sunt normate cu condiţiile $\varphi(\infty) = \infty$ şi $\varphi'(\infty) = 1$.

Notăm cu

$$\Sigma_0 = \{\varphi \in \Sigma : \ \varphi(\zeta) \neq 0, \ \zeta \in U^-\}.$$

Propoziţia 1.4.1 [85] *Între clasele S şi Σ_0 există o bijecţie, deci clasa Σ este "mai largă" decât clasa S.*

1.5 Teorema ariei.
Conjectura lui Bieberbach - Teorema lui de Branges

Teorema 1.5.1 (Gronwall) [47] *Dacă*

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}$$

este o funcţie din clasa Σ, atunci

$$\text{aria}\, E(\varphi) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2\right) \geq 0$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$$

(aria se înţelege în sensul de măsură Lebesgue bidimensională).

Teorema 1.5.2 (Conjectura lui Bieberbach - Teorema lui de Branges) [85] *Dacă funcţia $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ aparţine clasei S, atunci $|a_n| \leq n$, $n = 2, 3, \dots$ cu egalitate doar pentru funcţia lui Koebe (1.3.1) şi rotaţiile ei.*

1.6 Funcţii analitice cu partea reală pozitivă

Funcţiile analitice cu partea reală pozitivă au un rol important în caracterizarea unor clase speciale de funcţii univalente.

Definiţia 1.6.1 [85]

1. Prin clasa funcţiilor lui Carathéodory înţelegem clasa

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{H}(U) : \ p(0) = 1, \ \mathrm{Re}\, p(z) > 0, \ z \in U\}.$$

2. Prin clasa funcţiilor Schwarz înţelegem clasa

$$\mathcal{B} = \{\varphi \in \mathcal{H}(U) : \ \varphi(0) = 0, \ |\varphi(z)| < 1, \ z \in U\}.$$

Pe parcursul următoarelor cinci secţiuni, vom reaminti câteva clase de funcţii univalente care sunt caracterizate prin proprietăţi geometrice remarcabile exprimate analitic prin inegalităţi diferenţiale şi anume clasele funcţiilor stelate, convexe şi α-convexe.

1.7 Funcţii stelate

Definiţia 1.7.1 [85] Prin clasa funcţiilor stelate înţelegem clasa

$$S^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\, \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \ z \in U \right\}$$

Observaţia 1.7.1 Clasa S^* este compactă.

Definiţia 1.7.2 Pentru $0 \leq \alpha < 1$, definim mulţimea

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\, \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \ z \in U \right\} \tag{1.7.1}$$

numită clasa funcţiilor stelate de ordin α.

Definiţia 1.7.3 Pentru $0 < \alpha \leq 1$, definim

$$S^*[\alpha] = \left\{ f \in \mathcal{A} : \ \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \frac{\pi}{2}, \ z \in U \right\}$$

numită clasa funcţiilor tare stelate de ordinul α.

1.8 Funcţii uniform stelate

Definiţia 1.8.1 [42] Prin clasa funcţiilor uniform stelate înţelegem clasa

$$US^* = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\, [\frac{f(z) - f(\xi)}{(z-\xi)f'(z)}] > 0, \ (z, \xi) \in U \times U, \right\}$$

Definiţia 1.8.2 [2] Prin clasa funcţiilor uniform stelate de ordinul α, înţelegem clasa

$$US^*(\alpha) = \left\{ f \in S : \mathrm{Re}\, [\frac{f(z) - f(\xi)}{(z-\xi)f'(z)}] \geq \alpha, \quad (z, \xi) \in U \times U, \alpha \in [0, 1) \right\}$$

Observăm că $US^*(0) = US^*$.

1.9 Funcţii convexe

Definiţia 1.9.1 [85] Mulţimea

$$K \overset{not}{=} S^c = \left\{ f \in \mathcal{A} : \text{Re}\, \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0,\ z \in U \right\} \tag{1.9.1}$$

se numeşte clasa funcţiilor convexe normate cu condiţiile $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Observaţia 1.9.1 Avem $K \subset S^* \subset S$. Teorema de dualitate a lui Alexander se va scrie pentru aceste clase sub forma

$$f \in K \ \Leftrightarrow \ zf'(z) \in S^*.$$

Definiţia 1.9.2 Definim clasa funcţiilor convexe de ordinul α,

$$K(\alpha) = \left\{ f \in A : \text{Re}\, \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right) > \alpha, \quad 0 \le \alpha < 1 \right\}.$$

1.10 Funcţii uniform convexe

Definiţia 1.10.1 [43] Prin clasa funcţiilor uniform convexe înţelegem clasa

$$UCV = \left\{ f \in S : \text{Re}\, \{1 + \frac{f''(z)}{f'(z)}(z - \xi)\} \ge 0, ,\ (z, \xi) \in U \times U \right\}.$$

Definiţia 1.10.2 [113]

$$f(z) \in SP \Leftrightarrow \text{Re}\, \{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} \ge |\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1|,\ z \in U, \tag{1.10.1}$$

unde SP este clasa funcţiilor uniform stelate relativ la clasa UCV.

Observaţia 1.10.1

$$f(z) \in UCV \Leftrightarrow zf'(z) \in SP.$$

Definiţia 1.10.3 [113] O funcţie $f \in S$ este din clasa $SP(\alpha)$, dacă satisface caracterizarea analitică

$$\text{Re}\, \{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\} \ge |\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1|,\ \alpha \in \mathbb{R},\ z \in U, \tag{1.10.2}$$

şi
$f(z) \in UCV(\alpha)$, clasa funcţiilor uniform convexe de ordin α, dacă şi numai dacă $zf'(z) \in SP(\alpha)$.

1.11 Funcţii α-convexe

Definiţia 1.11.1 [85] Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ şi fie numărul $\alpha \in \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte α-convexă în discul unitate (sau, pe scurt, α-convexă), dacă Re $J(\alpha, f; z) > 0$, $z \in U$, unde

$$J(\alpha, f; z) = (1 - \alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right). \tag{1.11.1}$$

Notăm cu M_α clasa funcţiilor α-convexe.

1.12 Operatorii Sălăgean, Ruscheweyh şi Bernardi-Libera

Definiţia 1.12.1 [118] Pentru o funcţie $f \in \mathcal{H}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, operatorul I^n definit prin:

$$\begin{aligned}
&I^0 f(z) = f(z)\\
&I^1 f(z) = If(z) = zf'(z)\\
&\dots\\
&I^n f(z) = I(I^{n-1}f(z)) = z[I^{n-1}f(z)]',\ z \in U,\ n > 1,
\end{aligned}$$

se numeşte operatorul diferenţial al lui Sălăgean.

Definiţia 1.12.2 Pentru $f(z) \in \mathcal{H}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, operatorul R^n definit prin:

$$\begin{aligned}
&R^0 f(z) = f(z)\\
&R^1 f(z) = zf'(z)\\
&2R^2 f(z) = z[R^1 f(z)]' + R^1 f(z)\\
&\dots\\
&(n+1)R^{n+1} f(z) = z[R^n f(z)]' + n[R^n f(z)], \quad z \in U,
\end{aligned}$$

se numeşte operatorul diferenţial Ruscheweyh.

Definiţia 1.12.3

$$L_a[f](z) = F(z) = \frac{1+a}{z^a}\int_0^z f(t)t^{a-1}dt,$$

numit operatorul Bernardi-Libera.

1.13 Principiul subordonării. Metoda funcţiilor admisibile

Definiţia 1.13.1 [85] Fie $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Spunem că funcţia f este subordonată funcţiei g şi vom nota

$$f \prec g \quad \text{sau} \quad f(z) \prec g(z),$$

dacă există o funcţie $w \in \mathcal{H}(U)$, cu $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1$, $z \in U$ (adică $w \in \mathcal{B}$) astfel încât

$$f(z) = g[w(z)], \quad z \in U.$$

Fie $\Omega, \Delta \subset \mathbb{C}$, funcţia $p \in \mathcal{H}(U)$ cu proprietatea $p(0) = a$, $a \in \mathbb{C}$ şi funcţia $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$.

Cu ajutorul metodei funcţiilor admisibile se vor studia implicaţii de forma:

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) :\ z \in U\} \subset \Omega \ \Rightarrow\ p(U) \subset \Delta. \tag{1.13.1}$$

Definiţia 1.13.2 [85] Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ şi fie funcţia $h \in \mathcal{H}_u(U)$. Dacă funcţia $p \in \mathcal{H}[a, n]$ satisface subordonarea diferenţială

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z), \quad z \in U \tag{1.13.2}$$

atunci p se numeşte (a, n)-soluţie a acestei subordonări sau pe scurt soluţie a subordonării diferenţiale (1.13.2).

Subordonarea (1.13.2) se numeşte subordonare diferenţială de ordinul doi iar funcţia q univalentă în U, se numeşte (a,n)-dominantă a subordonării diferenţiale, sau mai scurt, dominantă a subordonării diferenţiale (1.13.2), dacă $p(z) \prec q(z)$ oricare ar fi funcţia p care satisface subordonarea (1.13.2).

O dominantă $\widetilde{q}$ cu proprietatea $\widetilde{q} \prec q$ oricare ar fi dominanta q pentru subordonarea (1.13.2) se numeşte cea mai bună (a,n)-dominantă, sau mai simplu, cea mai bună dominantă a subordonării diferenţiale (1.13.2).

Definiţia 1.13.3 [85] Notăm cu Q mulţimea funcţiilor q care sunt olomorfe şi injective pe $\overline{U} \setminus E(q)$, unde

$$E(q) = \left\{ \zeta \in \partial U : \lim_{z \to \zeta} q(z) = \infty \right\}$$

şi în plus $q'(\zeta) \neq 0$ pentru $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$. Mulţimea $E(q)$ se numeşte mulţime de excepţie.

Definiţia 1.13.4 [71], [73] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $q \in Q$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Definim clasa funcţiilor admisibile ca fiind mulţimea $\Psi_n[\Omega, q]$ a funcţiilor $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia de admisibilitate

$$\psi(r, s, t; z) \notin \Omega$$

atunci când

$$r = q(\zeta), \quad s = m\zeta q'(\zeta), \quad \mathrm{Re}\left[\frac{t}{s} + 1\right] \geq m\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1\right],$$

unde $z \in U$, $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$ şi $m \geq n$.

Dacă $n = 1$, vom nota $\Psi_1[\Omega, q] = \Psi[\Omega, q]$.

Dacă $\Omega \neq \mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex şi $h \in \mathcal{H}_u(U)$, $h(U) = \Omega$, atunci clasa funcţiilor admisibile o notăm cu $\Psi_n[h, q]$.

1.14 Subordonări diferenţiale liniare de ordinul I

Definiţia 1.14.1 [72] O subordonare diferenţială de forma

$$A(z)zp'(z) + B(z)p(z) \prec h(z) \tag{1.14.1}$$

sau

$$zp'(z) + P(z)p(z) \prec h(z) \tag{1.14.2}$$

se numeşte subordonare diferenţială liniară de ordinul întâi.

1.15 Subordonări diferenţiale liniare de ordinul II

Definiţia 1.15.1 [72] Prin subordonare diferenţială liniară de ordinul II înţelegem subordonarea liniară de forma

$$A(z)z^2p''(z) + B(z)zp'(z) + C(z)p(z) + D(z) \prec h(z), \tag{1.15.1}$$

unde A, B, C, D şi h sunt funcţii complexe sau mai general

$$A(z)z^2p''(z) + B(z)zp'(z) + C(z)p(z) + D(z) \in \Omega \tag{1.15.2}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1.16 Subordonări diferenţiale de tip Briot-Bouquet

Definiţia 1.16.1 [76] Fie β şi $\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$, $h \in \mathcal{H}_u(U)$ cu $h(0) = a$ şi fie $p \in \mathcal{H}[a, n]$ care verifică relaţia:

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h(z). \tag{1.16.1}$$

Această subordonare diferenţială se numeşte subordonare diferenţială de tip Briot-Bouquet.

1.17 Subordonări diferenţiale tari

Considerăm $\mathcal{H}(U \times \overline{U})$ ca fiind clasa funcţiilor analitice în $U \times \overline{U}$.

Definiţia 1.17.1 [9] Fie $h(z, \zeta)$ o funcţie analitică în $U \times \overline{U}$ şi fie $f(z)$ o funcţie analitică şi univalentă în U. Funcţia $f(z)$ spunem că este subordonată tare funcţiei $h(z, \zeta)$, sau că $h(z, \zeta)$ este superordonată tare funcţiei $f(z)$, şi scriem $f(z) \prec\prec h(z, \zeta)$, dacă $f(z)$ este subordonată funcţiei $h(z, \zeta)$ în funcţie de z, pentru toţi $\zeta \in \overline{U}$.
Dacă $h(z, \zeta)$ este o funcţie univalentă în U, pentru toţi $\zeta \in \overline{U}$, atunci $f(z) \prec\prec h(z, \zeta)$ dacă $f(0) = h(0, \zeta)$ şi $f(U) \subset h(U \times \overline{U})$.

Observaţia 1.17.1 Dacă $h(z, \zeta) \equiv h(z)$ atunci subordonarea tare devine noţiunea cunoscută de subordonare.

Definim clasele următoare de funcţii din $U \times \overline{U}$:

$$\mathcal{H}\zeta[a, n] = \{f \in \mathcal{H}(U \times \overline{U}) : \; f(z, \zeta) = a + a_n(\zeta)z^n + a_{n+1}(\zeta)z^{n+1} + \cdots\}$$

cu $z \in U$, $\;\zeta \in \overline{U}$, $a_k(\zeta)$ funcţii olomorfe în $\overline{U}$, $k \geq n$,

$$\mathcal{H}\zeta_u(U) = \{f \in \mathcal{H}\zeta[a, n] : \; f(\cdot, \zeta) \, \text{univalent in U}, \; \text{pentru toţi} \; \zeta \in \overline{U}\},$$

$$\mathcal{A}\zeta_n = \{f \in \mathcal{H}\zeta[a, n] : \; f(z, \zeta) = z + a_2(\zeta)z^2 + \cdots + a_n(\zeta)z^n + \cdots, \; z \in U, \zeta \in \overline{U}\}$$

cu $\mathcal{A}\zeta_1 = \mathcal{A}\zeta$, şi

$$\mathcal{S}\zeta = \{f \in \mathcal{A}\zeta_n : \; f(z, \zeta) \, \text{univalent in} \; U \times \overline{U}, \; z \in U, \; \text{pentru toţi} \; \zeta \in \overline{U}\}.$$

Fie

$$S^*\zeta = \left\{f \in \mathcal{A}\zeta : \; \mathrm{Re}\, \frac{zf'(z, \zeta)}{f(z, \zeta)} > 0, \; z \in U, \; \text{pentru toţi} \; \zeta \in \overline{U}\right\}$$

clasa funcţiilor stelate în $U \times \overline{U}$,

$$K\zeta = \left\{ f \in \mathcal{A}\zeta : \ \mathrm{Re}\, \frac{zf''(z,\zeta)}{f'(z,\zeta)} + 1 > 0, \ z \in U, \text{ pentru toţi } \zeta \in \overline{U} \right\}$$

clasa funcţiilor convexe în $U \times \overline{U}$,

$$C\zeta = \left\{ f \in \mathcal{A}\zeta : \ \exists \varphi \in K\zeta, \mathrm{Re}\, \frac{f'(z,\zeta)}{\varphi'(z,\zeta)} > 0, \ z \in U, \text{ pentru toţi } \zeta \in \overline{U} \right\}$$

clasa funcţiilor aproape convexe în $U \times \overline{U}$.

1.18 Superordonări diferenţiale

Problema duală a subordonărilor diferenţiale, cea a determinării de subordonate pentru superordonări diferenţiale, a fost iniţiată de S. S. Miller şi P. T. Mocanu [77] în anul 2003.

Fie Ω şi Δ două mulţimi din $\mathbb{C}$, p o funcţie analitică în discul unitate U şi funcţia $\varphi(r,s,t;z) : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. Se pune problema studierii unor implicaţii de forma

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : \ z \in U\} \ \Rightarrow \ \Delta \subset p(U). \tag{1.18.1}$$

Definiţia 1.18.1 [77] Fie $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ şi fie h analitică în U. Dacă p şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ sunt univalente în U şi satisfac superordonarea diferenţială de ordinul doi

$$h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \tag{1.18.2}$$

atunci p se numeşte o soluţie a superordonării diferenţiale. O funcţie analitică q se numeşte o subordonată a soluţiilor superordonării diferenţiale sau mai simplu o subordonată dacă $q \prec p$, pentru orice p ce satisface (1.18.2). O subordonată univalentă $\widetilde{q}$ ce satisface $q \prec \widetilde{q}$ pentru oricare subordonate q ale lui (1.18.2) se spune că e cea mai bună subordonată. Aceasta este unică, abstracţie făcând de o rotaţie în U.

1.19 Superordonări diferenţiale de tip Briot-Bouquet

Fie $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\Omega_2, \Delta_2 \subset \mathbb{C}$ şi fie $p \in H(U)$. În această secţiune se consideră problema duală a determinării condiţiilor pentru care

$$\Omega_1 \subset \left\{ p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} : \ z \in U \right\} \ \Rightarrow \ \Delta_1 \subset p(U). \tag{1.19.1}$$

În particular suntem interesaţi în determinarea celei mai largi mulţimi $\Delta_1 \subset \mathbb{C}$ pentru care are loc relaţia (1.19.1).

Dacă mulţimile $\Omega_1, \Omega_2, \Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{C}$ sunt domenii simple conexe neegale cu $\mathbb{C}$, este posibilă rescrierea expresiei anterioare în termeni de subordonare şi superordonare în următoarele forme:

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h_2(z) \ \Rightarrow \ p(z) \prec q_2(z) \tag{1.19.2}$$

şi

$$h_1(z) \prec p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \;\Rightarrow\; q_1(z) \prec p(z). \tag{1.19.3}$$

Se numeşte superordonare diferenţială Briot-Bouquet partea stângă a relaţiei (1.19.3), iar funcţia q_1 este numită o subordonată a superordonării diferenţiale. Cea mai bună subordonată este cea care este superordonată tututor celorlalte subordonate.

1.20 Superordonări diferenţiale tari

Noţiunea de superordonare diferenţială tare a fost introdusă şi dezvoltată de către G. I. Oros şi Gh. Oros [90], [95], pornind de la conceptul de subordonare diferenţială tare, introdus în [9] de către J. A. Antonino şi S. Romaguera.

Fie Ω o mulţime din planul complex $\mathbb{C}$, fie p funcţie analitică în U şi fie $\psi(r, s, t; z, \zeta) : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$.

Noţiunile cunoscute ale mulţimii Q şi ale clasei funcţiilor admisibile se rescriu astfel:

Definiţia 1.20.1 [92] Notăm cu Q mulţimea funcţiilor $q(\cdot, \zeta)$ analitice şi injective în raport cu z, pentru oricare $\zeta \in \overline{U}$, definite pe $\overline{U} - E(q)$, unde

$$E(q) = \{\xi \in \partial U : \lim_{z \to \xi} q(z, \zeta) = \infty, \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}\}.$$

Subclasa lui Q pentru care $f(0, \zeta) \equiv a$ este notată cu $Q(a)$.

Definiţia 1.20.2 [93] Fie Ω_ζ o mulţime în $\mathbb{C}$, $q(\cdot, \zeta) \in Q$, $q'(z, \zeta) \neq 0$, $z \in U$, $\zeta \in \overline{U}$, şi $n \in \mathbb{N}^*$ un întreg pozitiv. Clasa funcţiilor admisibile $\Psi_n[\Omega_\zeta, q(\cdot, \zeta)]$ este alcătuită din funcţiile de forma $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$, care satisfac condiţia de admisibilitate:

$$\psi(r, s, t; z, \zeta) \notin \Omega_\zeta, \tag{A}$$

pentru oricare $r = q(\xi, \zeta)$, $s = m \cdot \xi \cdot q'(\xi, \zeta)$,

$$\mathrm{Re}\left[\frac{t}{s} + 1\right] \geq m \mathrm{Re}\left[\frac{\xi q''(\xi, \zeta)}{q'(\xi, \zeta)} + 1\right],$$

unde $z \in U$, $\xi \in \partial U \setminus E(q)$, $\zeta \in \overline{U}$ şi $m \geq n$. Scriem $\Psi_1[\Omega_\zeta, q(\cdot, \zeta)]$ ca $\Psi[\Omega_\zeta, q(\cdot, \zeta)]$.

Definiţia 1.20.3 [95] Fie $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ şi fie $h(z, \zeta)$ analitică în $U \times \overline{U}$. Dacă $p(z, \zeta)$ şi $\varphi(p(z, \zeta), zp'(z, \zeta), z^2 p''(z, \zeta); z, \zeta)$ sunt univalente în U pentru toţi $\zeta \in \overline{U}$ şi satisfac superordonarea diferenţială tare (de ordinul doi)

$$h(z, \zeta) \prec\prec \varphi(p(z, \zeta), zp'(z, \zeta), z^2 p''(z, \zeta); z, \zeta), \tag{1.20.1}$$

atunci $p(z, \zeta)$ se numeşte soluţie a superordonării diferenţiale tari. O funcţie $q(z, \zeta)$ se numeşte o subordonată a soluţiilor superordonării diferenţiale tari, sau mai simplu o subordonată dacă $q(z, \zeta) \prec\prec p(z, \zeta)$ pentru toţi $p(\cdot, \zeta)$ satisfăcând şi (1.20.1). O subordonată univalentă $\widetilde{q}(z, \zeta)$, care satisface $q(z, \zeta) \prec\prec \widetilde{q}(z, \zeta)$ pentru toate subordonatele $q(\cdot, \zeta)$ ale superordonării (1.20.1), este numită cea mai bună subordonată. Notăm că cea mai bună subordonată este unică, abstracţie făcând de o rotaţie pe U.

Capitolul 2

Inegalităţi diferenţiale pentru funcţii univalente

Capitolul al doilea este dedicat în întregime inegalităţilor diferenţiale.

2.1 Inegalităţi diferenţiale pentru funcţii cu partea reală pozitivă

În această secţiune prezentăm anumite condiţii pentru funcţii complexe definite în discul unitate, astfel încât inegalitatea diferenţială

$$\text{Re}\,[A(z)p^2(z) + B(z)p(z) + \alpha(zp'(z) - a)^3 - 3a\beta\left(zp'(z) - \frac{b}{2}\right)^2 +$$

$$+3a^2\gamma(zp'(z)) + \delta] > 0$$

implică faptul că p este o funcţie cu partea reală pozitivă. Inegalitatea de mai sus este o generalizare a unei anumite inegalităţi obţinută de B. A. Frasin [34]. Rezultatele acestei secţiuni sunt originale, şi sunt conţinute în lucrarea [125]. Particularizând valorile coeficienţilor se evidenţiază rezultatele din lucrările "On a certain differential inequality" [126], respectiv "On a certain differential inequality I" [127].

Continuând ideile din A. Cătaş [23] obţinem următoarea teoremă.

Teorema 2.1.1 [125] *Fie* $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\text{Re}\,\alpha \geq 0$, $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha a + \beta b + \gamma a \in \mathbb{R}_+$,

$$\delta < \left(\frac{n^3}{8} + a^3\right)\text{Re}\,\alpha + \frac{3an^2}{4}(\alpha + \beta) + \frac{3an}{2}(\alpha a + \beta b + \gamma a) + \frac{3ab^2}{4}\text{Re}\,\beta$$

şi n *un număr întreg pozitiv. Considerăm funcţiile* $A, B : U \to \mathbb{C}$ *care satisfac*

$$(i)\text{Re}\,A(z) > -\frac{3n^3}{8}\text{Re}\,\alpha - \frac{3an^2}{2}(\alpha + \beta) - \frac{3an}{2}(\alpha a + \beta b + \gamma a);$$

(2.1.1) $$(ii)\text{Im}^2 B(z) \leq 4\left[\frac{3n^3}{8}\text{Re}\,\alpha + \frac{3an^2}{2}(\alpha+\beta) + \frac{3an}{2}(\alpha a+\beta b+\gamma a) + \text{Re}\,A(z)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{n^3}{8}+a^3\right)\text{Re}\,\alpha + \frac{3an^2}{4}(\alpha+\beta) + \frac{3an}{2}(\alpha a+\beta b+\gamma a) + \frac{3ab^2}{4}\text{Re}\,\beta - \delta\right].$$

Dacă $p \in \mathcal{H}[1,n]$ *şi*

$$\text{Re } \left[A(z)p^2(z)+B(z)p(z)+\alpha(zp'(z)-a)^3-3a\beta\left(zp'(z)-\frac{b}{2}\right)^2+ \right. \tag{2.1.2}$$

$$\left. +3a^2\gamma(zp'(z))+\delta\right]>0$$

atunci

$$\text{Re } p(z)>0.$$

Observaţia 2.1.1 Pentru $a=1$ s-au obţinut rezultate similare în [23]. Pentru $b=0$ s-au obţinut rezultate anterior de către autoare în [126], iar pentru $a=1$, $b=0$ şi $\delta=1$ obţinem rezultate din [127].

Luând $\beta=\gamma=\bar{\alpha}$ în Teorema 2.1.1, avem

Corolarul 2.1.1 [125] *Fie* $a,b\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\text{Re }\alpha\geq 0$,

$$\delta<\left(\frac{n^3}{8}+a^3+\frac{3an^2}{2}+\frac{3an}{2}(2a+b)+\frac{3ab^2}{4}\right)\cdot\text{Re }\alpha$$

şi n *un număr întreg pozitiv. Considerăm funcţiile* $A,B:U\to\mathbb{C}$ *cu satisfăcând*

$$\begin{aligned} &(i)\text{Re } A(z)>\left[-\frac{3n^3}{8}-3an^2-\frac{3an}{2}(2a+b)\right]\text{Re }\alpha;\\ &(ii)\text{Im }^2B(z)\leq 4\cdot\left[\left(\frac{3n^3}{8}+3an^2-\frac{3an}{2}(2a+b)\right)\cdot\text{Re }\alpha+\text{Re }A(z)\right]\cdot\\ &\qquad\cdot\left[\left(\frac{n^3}{8}+a^3+\frac{3an^2}{2}+\frac{3an}{2}(2a+b)+\frac{3ab^2}{4}\right)\text{Re }\alpha-\delta\right]. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Dacă $p \in \mathcal{H}[1,n]$ *şi*

$$\text{Re } \left[A(z)p^2(z)+B(z)p(z)+\alpha(zp'(z)-a)^3-3a\bar{\alpha}\left(zp'(z)-\frac{b}{2}\right)^2+ \right. \tag{2.1.4}$$

$$\left. +3a^2\bar{\alpha}(zp'(z))+\delta\right]>0$$

atunci $\text{Re } p(z)>0$.

Luând $\alpha+\beta=\alpha a+\beta b+\gamma a=\alpha+\gamma=1$ în Teorema 2.1.1, obţinem

Corolarul 2.1.2 [125] *Fie* $a,b\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\text{Re }\alpha\geq 0$,

$$\delta<\left(\frac{n^3}{8}+a^3\right)\text{Re }\alpha+\frac{3an^2}{4}+\frac{3an}{2}+\frac{3ab^2}{4}(1-\alpha)$$

şi n *un număr întreg pozitiv. Presupunem că funcţiile* $A,B:U\to\mathbb{C}$ *satisfac*

$$\begin{aligned} &(i)\ \text{Re } A(z)>-\frac{3n^3}{8}\text{Re }\alpha-\frac{3an^2}{2}-\frac{3an}{2};\\ &(ii)\ \text{Im }^2B(z)\leq\ 4\cdot\left[\frac{3n^3}{8}\text{Re }\alpha+\frac{3an^2}{2}+\frac{3an}{2}+\text{Re }A(z)\right]\cdot\\ &\qquad\cdot\left[\left(\frac{n^3}{8}+a^3\right)\text{Re }\alpha+\frac{3an^2}{4}+\frac{3an}{2}+\frac{3ab^2}{4}(1-\alpha)-\delta\right]. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Dacă $p \in \mathcal{H}[1, n]$ *şi*

$$\text{Re}\left[A(z)p^2(z) + B(z)p(z) + \alpha(zp'(z) - a)^3 - 3a(1-\alpha)\left(zp'(z) - \frac{b}{2}\right)^2 + \right. \tag{2.1.6}$$

$$\left. +3a^2(1-\alpha)(zp'(z)) + \delta\right] > 0$$

atunci

$$\text{Re } p(z) > 0.$$

2.2 Inegalităţi diferenţiale pentru funcţii univalente

În această secţiune vom folosi o regiune parabolică a planului pentru a demonstra anumite inegalităţi diferenţiale pentru funcţii uniform univalente în discul unitate U. Aplicând operatorul diferenţial Sălăgean I^n, prezentat în Capitolul I (Definiţia 1.12.1), unei funcţii olomorfe, obţinem condiţii pentru apartenenţa la $SP(\alpha)$, clasa funcţiilor uniform stelate de ordinul α, la $UCV(\alpha)$, subclasa funcţiilor uniform convexe de ordinul α, la $UCC(\alpha)$, subclasa funcţiilor uniform aproape convexe de ordinul α. Rezultatele sunt originale şi se regăsesc în lucrarea [128].

Teorema următoare oferă o condiţie pentru uniform stelaritate:

Teorema 2.2.1 [128] *Fie* $f \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. *Dacă operatorul diferenţial aplicat funcţiei* f, $I^n f(z)$, *satisface următoarea inegalitate:*

$$\text{Re}\left(\frac{\frac{I^{n+2}f(z)}{I^{n+1}f(z)} - 1}{\frac{I^{n+1}f(z)}{I^n f(z)} - 1}\right) < \frac{5}{3}, \tag{2.2.1}$$

atunci $I^n f(z)$ *este uniform stelată în* U.

Vom introduce o condiţie suficientă la frontieră pentru funcţiile uniform stelate:

Teorema 2.2.2 [128] *Fie* $f \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ *şi operatorul diferenţial* $I^n f$. *Dacă*

$$\sum_{k=2}^{\infty}(2k + 1 - \alpha)|a_{k+1}| < 1 - \alpha$$

atunci $I^n f(z) \in SP(\alpha)$.

Următoarea teoremă oferă o condiţie pentru uniform convexitate:

Teorema 2.2.3 [128] *Fie* $f \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. *Dacă operatorul diferenţial* $I^n f$ *satisface următoarea inegalitate:*

$$\text{Re}\left[\frac{\frac{I^{n+3}f(z) - I^{n+2}f(z)}{I^{n+2}f(z) - I^{n+1}f(z)} - 2}{\frac{I^{n+2}f(z)}{I^{n+1}f(z)} - 1}\right] < 3 \tag{2.2.2}$$

atunci $I^n f(z)$ *este uniform convexă în* U.

În teorema următoare se obţin condiţii suficiente la frontieră pentru funcţiile uniform convexe:

Teorema 2.2.4 [128] *Fie* $f \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ *şi operatorul diferenţial* $I^n f$. *Dacă*

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(2k+1-\alpha)|a_{k+1}| < 1-\alpha \tag{2.2.3}$$

atunci $I^n f(z) \in UCV(\alpha)$.

Teoremele următoare oferă suficiente condiţii pentru funcţiile uniform aproape convexe.

Teorema 2.2.5 [128] *Fie* $f \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. *Dacă operatorul diferenţial* $I^n f$ *satisface următoarea inegalitate:*

$$\mathrm{Re}\,(\frac{I^{n+2}f(z)}{I^{n+1}f(z)} - 1) < \frac{1}{3}, \tag{2.2.4}$$

atunci $I^n f(z)$ *este uniform aproape convexă în* U.

Teorema 2.2.6 [128] *Fie* $f \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ *şi operatorul diferenţial* $I^n f$. *Dacă* $I^n f(z)$ *satisface următoarea inegalitate:*

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}| < \frac{1-\alpha}{2}, \tag{2.2.5}$$

atunci $I^n f(z) \in UCC(\alpha)$.

2.3 Condiţii suficiente de univalenţă ale unor operatori integrali

În această secţiune vom determina condiţii suficiente de univalenţă ale unor operatori integrali, folosind anumite criterii de univalenţă obţinute de către Ahlfors [3], Becker [11] şi Pascu [101]. Rezultatele acestei secţiuni sunt obţinute în colaborare şi sunt conţinute în lucrările [134], respectiv [135].

Teorema 2.3.1 [134] *Fie* $M \geq 1$ *şi* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, *şi* c *număr complex cu* $|c| \leq 1$, $c \neq -1$. *Fie funcţia* $g \in \mathcal{A}$, *satisfăcând condiţiile*

$$|\frac{g(z)}{z}| \leq 3M-2, \tag{2.3.1}$$

$$\left|\frac{z^2 g'(z)}{g^2(z)} - 1\right| \leq \frac{1}{3M-2}, \tag{2.3.2}$$

pentru toţi $z \in U$, *şi*

$$|c| + \frac{3|\alpha-1|}{|\alpha|} \leq 1, \tag{2.3.3}$$

atunci funcţia

$$G_{\alpha,M}(z) = \left[\frac{\alpha}{M}\int_0^z u^{\frac{\alpha}{M}-1}\left[\frac{g(u)}{u}\right]^{\frac{\alpha-1}{M^2}} du\right]^{\frac{M}{\alpha}} \tag{2.3.4}$$

este în clasa S.

Observaţia 2.3.1 Pentru $M = 1$, obţinem rezultatul din V. Pescar [105].

Teorema 2.3.2 [134] *Fie $M \geq 1$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ \alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, şi β un număr complex cu $\mathrm{Re}\ \beta > \mathrm{Re}\ \alpha$. Fie funcţia g satisfăcând condiţia*

(2.3.5) $$\left|\frac{zg'(z)}{g(z)} - 1\right| < \frac{M}{3}$$

pentru toţi $z \in U$, şi

(2.3.6) $$|\alpha| < 3\mathrm{Re}\ \alpha,$$

atunci funcţia

(2.3.7) $$H_{\alpha,\beta,M}(z) = \left[\beta \int_0^z u^{\beta-1}\left[\frac{g(u)}{u}\right]^{\frac{\alpha}{M}} du\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

este în clasa S.

Observaţia 2.3.2 Pentru $M = 1$, $\beta = 1$, rezultatul a fost obţinut în [11].

Teorema 2.3.3 [135] *Fie $M \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ \alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, şi c un număr complex cu $|c| \leq 1$, $c \neq -1$. Fie funcţia g satisfăcând condiţia*

(2.3.8) $$|\frac{g(z)}{z}| \leq M,$$

(2.3.9) $$\left|\frac{z^2 g'(z)}{g^2(z)} - 1\right| \leq \frac{2M-1}{M}$$

pentru toţi $z \in U$, şi

(2.3.10) $$|c| + 3|\alpha - 1| \leq 1$$

atunci funcţia

(2.3.11) $$T_{\alpha,M}(z) = \int_0^z \left[\frac{g(u)}{u}\right]^{\frac{\alpha-1}{M}} du$$

este în clasa S.

Observaţia 2.3.3 Pentru $M = 1$, condiţia (2.3.9) exprimă o condiţie suficientă pentru univalenţa funcţiei g şi acest rezultat poate fi găsit în [[100], Lema C].

Capitolul 3

Subordonări diferenţiale

Al treilea capitol este alcătuit dintr-o singură secţiune care conţine în întregime rezultate originale, obţinute în colaborare, regăsite în lucrarea [136]. Se utilizează tehnica subordonărilor diferenţiale şi operatorul diferenţial Sălăgean pentru stabilirea proprietăţilor unei clase de funcţii olomorfe convexe.

3.1 Funcţii univalente definite prin operatorul diferenţial Sălăgean

Folosim operatorul cunoscut I^n (v. Definiţia 1.12.1) pentru a introduce o clasă de funcţii olomorfe $S_n(\beta)$.

Definiţia 3.1.1 [97] Dacă $0 \leq \beta < 1$ şi $n \in \mathbb{N}$, fie $S_n(\beta)$ clasa funcţiilor $f \in A$, care satisfac inegalitatea:

$$\mathrm{Re}\,(I^n f)'(z) > \beta, \quad z \in U.$$

Teorema 3.1.1 [136] *Clasa de funcţii univalente $S_n(\beta)$ este convexă.*

Pentru clasa $S_n(\beta)$ introducem un nou operator integral şi studiem subordonările diferenţiale obţinute.

Teorema 3.1.2 [136] *Fie q o funcţie convexă din U, $q(0) = 1$ şi fie*

$$h(z) = q(z) + \frac{1}{c+2} zq'(z), \quad z \in U,$$

unde c este un număr complex, cu $\mathrm{Re}\, c > -2$.
Dacă $f \in S_n(\beta)$ şi $F = I_c(f)$ este dat de operatorul integral

(3.1.1)
$$F(z) = I_c(f)(z) = \frac{c+2}{z^{c+1}} \int_0^z t^c f(t)dt, \quad \mathrm{Re}\, c > -2,$$

atunci

(3.1.2)
$$[I^n f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U$$

implică

$$[I^n F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

şi acest rezultat este exact.

Teorema 3.1.3 [136] *Fie* Re $c > -2$ *şi*

$$w = \frac{1 + |c+2|^2 - |c^2 + 4c + 3|}{4\text{Re }(c+2)}. \tag{3.1.3}$$

Fie h o funcţie analitică în U cu $h(0) = 1$ şi presupunem că

$$\text{Re } \frac{zh''(z)}{h'(z)} + 1 > -w.$$

Dacă $f \in S_n(\beta)$ şi $F = I_c(f)$, unde F este definit de (3.1.1), atunci

$$[I^n f(z)]' \prec h(z), \quad z \in U \tag{3.1.4}$$

implică

$$[I^n F(z)]' \prec q(z), \quad z \in U,$$

unde q este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$q(z) + \frac{1}{c+2} zq'(z) = h(z), \quad h(0) = 1,$$

dat de

$$q(z) = \frac{c+2}{z^{c+2}} \int_0^z t^{c+1} h(t) dt, \quad z \in U.$$

De asemenea q este cea mai bună dominantă.

Observaţia 3.1.1 [136] Dacă considerăm

$$h(z) = \frac{1 + (2\beta - 1)z}{1 + z}$$

în Teorema 3.1.3, obţinem următorul Corolar.

Corolarul 3.1.1 [136] *Dacă $0 \leq \beta < 1$, $n \in \mathbb{N}$,* Re $c > -2$ *şi I_c este definit de (3.1.1), atunci*

$$I_c[S_n(\beta)] \subset S_n(\delta),$$

unde $\delta = \min\limits_{|z|=1} \text{Re } q(z) = \delta(c, \beta)$, acest rezultat fiind exact. De asemenea

$$\delta = \delta(c, \beta) = 2\beta - 1 + (c+2)(2 - 2\beta)\sigma(c), \tag{3.1.5}$$

unde

$$\sigma(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t} dt. \tag{3.1.6}$$

Observaţia 3.1.2 Dacă considerăm cazul particular $n = 0$, $\beta = 0$, $c = -1$, atunci

$$h(z) = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

În Corolarul 3.1.1 obţinem

$$[I^0 F(z)]' = F(z) \prec q(z) = -1 + \frac{2}{z} \cdot \ln 2,$$

$$\text{Re } F(z) \geq \delta(-1, 0) = -1 + \ln 4,$$

deci

$$I_c[S_0(0)] \subset S_0(\delta).$$

.

Capitolul 4

Subordonări diferenţiale tari

Capitolul patru este rezervat subordonărilor diferenţiale tari, fiind constituit din trei secţiuni ce conţin numai rezultate originale regăsite în lucrările autoarei [129], [130], [131].

4.1 Subordonări diferenţiale tari obţinute prin intermediul unui operator integral

În această secţiune definim o nouă clasă de funcţii $S_n^m(\alpha)$, şi studiem subordonări diferenţiale tari obţinute folosind proprietăţile operatorului integral Sălăgean. Rezultatele sunt originale şi se regăsesc în lucrarea [129].

Definiţia 4.1.1 [129] Fie $\alpha > 1$ şi $m, n \in \mathbb{N}$. Notăm cu $S_n^m(\alpha)$ mulţimea funcţiilor $f \in A\zeta_n$ care satisfac inegalitatea

$$Re[\mathtt{I}^m f(z,\zeta)]'_z > \alpha, \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}.$$

Teorema 4.1.1 [129] *Dacă* $\alpha < 1$ *şi* $m, n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$S_n^m(\alpha) \subset S_n^{m+1}(\delta),$$

unde

$$\delta = \delta(\alpha, \zeta, n) = 2\alpha - \zeta + \frac{2(\zeta - \alpha)}{n}\sigma(\frac{1}{n})$$

şi

$$\sigma(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt. \tag{4.1.1}$$

Teorema 4.1.2 [129] *Fie* $h(z,\zeta)$ *o funcţie analitică din* $U \times \overline{U}$ *cu* $h(0,\zeta) = 1$, $h'(0,\zeta) \neq 0$, *care satisface inegalitatea*

$$Re[1 + \frac{zh''(z,\zeta)}{h'(z,\zeta)}] > -\frac{1}{2}.$$

Dacă $f(z,\zeta) \in \mathcal{A}\zeta_n$ *şi verifică subordonarea diferenţială tare*

$$[I^m f(z,\zeta)]' \prec\prec h(z,\zeta), \tag{4.1.2}$$

atunci

$$[I^{m+1}f(z,\zeta)]' \prec\prec g(z,\zeta),$$

unde

$$g(z,\zeta) = \frac{1}{nz^{\frac{1}{n}}}\int_0^z h(t,\zeta)t^{\frac{1}{n}-1}dt.$$

Funcţia $g(z,\zeta) \in K\zeta$ şi este cea mai bună dominantă.

Teorema 4.1.3 [129] *Fie $g(z,\zeta) \in K\zeta$ o funcţie cu $g(0,\zeta) = 1$ şi presupunem că*

$$h(z,\zeta) = g(z,\zeta) + zg'(z,\zeta), \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}.$$

Dacă $f(z,\zeta) \in \mathcal{A}\zeta_n$ şi verifică subordonarea diferenţială tare

(4.1.3) $$[I^m f(z,\zeta)]' \prec\prec h(z,\zeta),$$

atunci

$$[I^{m+1}f(z,\zeta)]' \prec\prec g(z,\zeta).$$

Teorema 4.1.4 [129] *Fie $g(z,\zeta) \in K\zeta$ o funcţie cu $g(0,\zeta) = 1$, şi funcţia $h(z,\zeta)$ dată prin*

$$h(z,\zeta) = g(z,\zeta) + nzg'(z,\zeta).$$

Dacă $f(z,\zeta) \in \mathcal{A}\zeta_n$ şi verifică subordonarea diferenţială tare

(4.1.4) $$[I^m f(z,\zeta)]' \prec\prec h(z,\zeta),$$

atunci

$$\frac{I^m f(z,\zeta)}{z} \prec\prec g(z,\zeta).$$

4.2 Subordonări diferenţiale tari obţinute cu operatorul Ruscheweyh

În această secţiune definim o nouă clasă de funcţii univalente $\mathcal{R}\zeta_n^m(\alpha)$, şi studiem noi subordonări diferenţiale tari folosind proprietăţile operatorului Ruscheweyh. Rezultatele sunt originale şi se regăsesc în lucrarea [130].

Definiţia 4.2.1 [130] Fie $\alpha < 1$ şi $m, n \in \mathbb{N}$. Notăm cu $\mathcal{R}\zeta_n^m(\alpha)$ mulţimea funcţiilor $f \in A\zeta_n$ care satisfac inegalitatea

(4.2.1) $$Re[R^m f(z,\zeta)]'_z > \alpha, \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}.$$

Teorema 4.2.1 [130] *Dacă $\alpha < 1$ şi $m, n \in \mathbb{N}$, atunci*

$$\mathcal{R}\zeta_n^{m+1}(\alpha) \subset \mathcal{R}\zeta_n^m(\delta),$$

unde

(4.2.2) $$\delta = \delta(\alpha,\zeta,n,m) = 2\alpha - \zeta + 2(\zeta-\alpha)\frac{m+1}{n}\sigma(\frac{m+1}{n})$$

şi

(4.2.3) $$\sigma(x) = \int_0^z \frac{t^{x-1}}{1+t}dt.$$

Teorema 4.2.2 [130] *Fie $q(z,\zeta) \in K\zeta$ o funcţie cu $q(0,\zeta) = 1$, şi fie $h(z,\zeta)$ o funcţie analitică dată de*

$$h(z,\zeta) = q(z,\zeta) + \frac{1}{m+1} zq'(z,\zeta), \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}. \tag{4.2.4}$$

Dacă $f \in A\zeta_n$ şi are loc subordonarea diferenţială tare

$$[R^{m+1} f(z,\zeta)]' \prec\prec h(z,\zeta), \tag{4.2.5}$$

atunci

$$[R^m f(z,\zeta)]' \prec\prec q(z,\zeta)$$

şi acesta este cel mai bun rezultat.

Teorema 4.2.3 [130] *Fie $h(z,\zeta)$ o funcţie analitică din $U \times \overline{U}$ cu $h(0,\zeta) = 1$, $h'(0,\zeta) \neq 0$, care satisface inegalitatea*

$$Re[1 + \frac{zh''(z,\zeta)}{h'(z,\zeta)}] > -\frac{1}{2(m+1)}, m \geq 0. \tag{4.2.6}$$

Dacă $f(z,\zeta) \in A\zeta_n$ şi are loc subordonarea diferenţială tare

$$[R^{m+1} f(z,\zeta)]' \prec\prec h(z,\zeta), \tag{4.2.7}$$

atunci

$$[R^m f(z,\zeta)]' \prec\prec q(z,\zeta),$$

unde

$$q(z,\zeta) = \frac{m+1}{nz^{\frac{m+1}{n}}} \int_0^z h(t,\zeta) t^{\frac{m+1}{n}-1} dt. \tag{4.2.8}$$

Funcţia $q(z,\zeta) \in K\zeta$ şi este cea mai bună dominantă.

Teorema 4.2.4 [130] *Fie $q(z,\zeta) \in K\zeta$ o funcţie cu $q(0,\zeta) = 1$ şi presupunem că*

$$h(z,\zeta) = q(z,\zeta) + nzq'(z,\zeta), \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}, n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $f(z,\zeta) \in A\zeta_n$ şi are loc subordonarea diferenţială tare

$$[R^m f(z,\zeta)]' \prec\prec h(z,\zeta), \tag{4.2.9}$$

atunci

$$\frac{[R^m f(z,\zeta)]}{z} \prec\prec q(z,\zeta).$$

4.3 Subclase de funcţii $\alpha-$uniform convexe obţinute utilizând un operator integral şi teoria subordonărilor diferenţiale tari

În această secţiune definim anumite subclase de funcţii $\alpha-$uniform convexe în raport cu un domeniu convex inclus în semiplanul drept D, obţinute utilizând un operator integral şi teoria subordonărilor diferenţiale tari. Rezultatele sunt originale şi se regăsesc în lucrarea [131].

Definiţia 4.3.1 [12] Se consideră operatorul integral $L_a : \mathcal{A}\zeta_n \to \mathcal{A}\zeta_n$ definit astfel:

$$f(z,\zeta) = L_a F(z,\zeta) = \frac{1+a}{z^a} \int_0^z F(t,\zeta) t^{a-1} dt, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}\, a \geq 0. \tag{4.3.1}$$

În cazul $L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a = 1, 2, 3, \cdots$, acest operator a fost introdus de S. D. Bernardi [12]. Pentru mai multe detalii vezi Definiţia 1.12.3.

Definiţia 4.3.2 [67] Fie $\alpha \in [0,1]$ şi $f(z,\zeta) \in \mathcal{A}\zeta_n$.
Spunem că $f(z,\zeta)$ este o funcţie $\alpha-$uniform convexă dacă

$$\text{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf'(z,\zeta)}{f(z,\zeta)} + \alpha(1 + \frac{zf''(z,\zeta)}{f'(z,\zeta)})\right] \geq \left|(1-\alpha)(\frac{zf'(z,\zeta)}{f(z,\zeta)} - 1) + \alpha\frac{zf''(z,\zeta)}{f'(z,\zeta)}\right|,$$

$z \in U$, pentru oricare $\zeta \in \overline{U}$.
Notăm această clasă cu $UM\zeta_\alpha$.

În cele ce urmează folosim operatorul diferenţial Sălăgean (v. Definiţia 1.12.1), adaptat claselor de funcţii definite în Capitolul I, secţiunea 17.

Definiţia 4.3.3 [67] Fie $\alpha \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$.
Spunem că $f(z,\zeta) \in \mathcal{A}\zeta_n$ este în clasa $UD\zeta_{n,\alpha}(\beta,\gamma)$, $\beta \geq 0$, $\gamma \in [-1,1)$, $\beta + \gamma \geq 0$, dacă

$$\text{Re}\left[(1-\alpha)\frac{I^{n+1}f(z,\zeta)}{I^n f(z,\zeta)} + \alpha\frac{I^{n+2}f(z,\zeta)}{I^{n+1}f(z,\zeta)}\right] \geq$$

$$\geq \beta\left|(1-\alpha)\frac{I^{n+1}f(z,\zeta)}{I^n f(z,\zeta)} + \alpha\frac{I^{n+2}f(z,\zeta)}{I^{n+1}f(z,\zeta)} - 1\right| + \gamma.$$

Definiţia 4.3.4 [15] Funcţia $f(z,\zeta) \in \mathcal{A}\zeta_n$ este n-stelată în raport cu domeniul convex D inclus în semiplanul drept, dacă expresia diferenţială $\dfrac{I^{n+1}f(z,\zeta)}{I^n f(z,\zeta)}$ ia valori în domeniul D.

Observaţia 4.3.1 Dacă considerăm $q(z,\zeta)$ funcţie univalentă cu $q(0,\zeta) = 1$, $\text{Re}\, q(z,\zeta) > 0$, $q'(0,\zeta) > 0$, care transformă discul unitate U în domeniul convex D, avem:

$$\frac{I^{n+1}f(z,\zeta)}{I^n f(z,\zeta)} \prec\prec q(z,\zeta).$$

Denumim cu $S^*\zeta_n(q)$ clasa tuturor acestor funcţii.

Fie $q(z,\zeta)$ funcţia univalentă cu $q(0,\zeta) = 1$, $q'(0,\zeta) > 0$, care transformă discul unitate U într-un domeniu convex D inclus în semiplanul drept.

Definiţia 4.3.5 [1] Fie $f(z,\zeta)\in\mathcal{A}\zeta_n$ şi $\alpha\in[0,1]$. Spunem că f este o funcţie $\alpha-$uniform convexă în raport cu D, dacă

$$J(\alpha,f;z,\zeta)=(1-\alpha)\frac{zf'(z,\zeta)}{f(z,\zeta)}+\alpha(1+\frac{zf''(z,\zeta)}{f'(z,\zeta)})\prec\prec q(z,\zeta).$$

Notăm această clasă cu $UM\zeta_\alpha(q)$.

Teorema 4.3.1 [131] *Pentru toţi $\alpha,\alpha'\in[0,1]$ cu $\alpha<\alpha'$ avem $UM\zeta_{\alpha'}(q)\subset UM\zeta_\alpha(q)$.*

Teorema 4.3.2 [131] *Dacă $F(z,\zeta)\in UM\zeta_\alpha(q)$ atunci $f(z,\zeta)=L_aF(z,\zeta)\in S^*\zeta_0(q)$, unde L_a este operatorul integral definit de* (4.3.1) *şi $\alpha\in[0,1]$.*

Definiţia 4.3.6 [1] Fie $f(z,\zeta)\in\mathcal{A}\zeta_n$ şi $\alpha\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$. Spunem că f este o funcţie $\alpha-n-$uniform convexă în raport cu D, dacă

$$J_n(\alpha,f;z,\zeta)=(1-\alpha)\frac{I^{n+1}f(z,\zeta)}{I^nf(z,\zeta)}+\alpha\frac{I^{n+2}f(z,\zeta)}{I^{n+1}f(z,\zeta)}\prec\prec q(z,\zeta).$$

Notăm această clasă cu $UD\zeta_{n,\alpha}(q)$.

Teorema 4.3.3 [131] *Pentru toţi $\alpha,\alpha'\in[0,1]$ cu $\alpha<\alpha'$ avem $UD\zeta_{n,\alpha'}(q)\subset UD\zeta_{n,\alpha}(q)$.*

Teorema 4.3.4 [131] *Dacă $F(z,\zeta)\in UD\zeta_{n,\alpha}(q)$, atunci $f(z,\zeta)=L_aF(z,\zeta)\in S\zeta_n^*(q)$, unde L_a este operatorul integral definit în (4.3.1).*

Capitolul 5

Superordonări diferenţiale tari

Capitolul al cincilea tratează superordonări diferenţiale tari de ordinul întâi, cea mai bună subordonată a unei superordonări diferenţiale tari, superordonări diferenţiale tari obţinute cu operatori cunoscuţi.

5.1 Superordonări diferenţiale tari de ordinul întâi

În această secţiune studiem cazul special al superordonărilor diferenţiale tari de ordinul întâi. Rezultatele sunt originale şi se regăsesc în lucrarea [98].

În articolul [91], folosind definiţiile date de Pommerenke [108], Miller şi Mocanu [76], se introduce noţiunea de lanţ de subordonare tare (pornind de la lanţ Löwner v. Definiţia 1.13.5) ca fiind:

Definiţia 5.1.1 [91] Funcţia $L : U \times \overline{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ este un lanţ de subordonare tare (sau lanţ Löwner tare) dacă $L(z, \zeta; t)$ este analitică şi univalentă în U pentru oricare $\zeta \in \overline{U}$, $t \geq 0$, $L(z, \zeta; t)$ este o funcţie continuă diferenţiabilă de t în $[0, \infty)$ pentru toţi $z \in U$, $\zeta \in \overline{U}$, şi $L(z, \zeta; s) \prec\prec L(z, \zeta; t)$, unde $0 \leq s \leq t$.

Teorema 5.1.1 [98] *Fie $h_1(z, \zeta)$ convexă în U, pentru toţi $\zeta \in \overline{U}$ cu $h_1(0, \zeta) = a$, $\gamma \neq 0$ cu* $\operatorname{Re} \gamma > 0$ *şi $p \in \mathcal{H}\zeta[a, 1] \cap Q$.*
Dacă $p(z, \zeta) + \dfrac{zp'(z, \zeta)}{\gamma}$ este univalentă în U, pentru toţi $\zeta \in \overline{U}$, şi au loc

$$h_1(z, \zeta) \prec\prec p(z, \zeta) + \frac{zp'(z, \zeta)}{\gamma}, \tag{5.1.1}$$

$$q_1(z, \zeta) = \frac{\gamma}{z^\gamma} \int_0^z h_1(t, \zeta) t^{\gamma - 1} dt, \tag{5.1.2}$$

atunci

$$q_1(z, \zeta) \prec\prec p(z, \zeta).$$

Funcţia $q_1(z, \zeta)$ este convexă şi este cea mai bună subordonată.

Teorema 5.1.2 [98] *Fie $q(z, \zeta)$ convexă în U, pentru toţi $\zeta \in \overline{U}$ şi fie $h(z, \zeta)$ definită prin*

$$q(z, \zeta) + \frac{zq'(z, \zeta)}{\gamma} = h(z, \zeta), \quad z \in U, \ \zeta \in \overline{U}, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0. \tag{5.1.3}$$

Dacă $p(z,\zeta) \in \mathcal{H}\zeta[a,1] \cap Q$, $p(z,\zeta) + \dfrac{zp'(z,\zeta)}{\gamma}$ *este univalentă în* U, *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$ *şi satisface*

$$h(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta) + \frac{zp(z,\zeta)}{\gamma}, \tag{5.1.4}$$

atunci

$$q(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta),$$

unde

$$q(z,\zeta) = \frac{\gamma}{z^\gamma}\int_0^z h(t,\zeta)t^{\gamma-1}dt.$$

Funcţia q *este cea mai bună subordonată.*

Observaţia 5.1.1 Această ultimă teoremă este un exemplu de soluţie la Problema 3 la care ne-am referit în Capitolul I, secţiunea 1.20.

Următoarea teoremă este exemplu de soluţie la Problema 2 (Capitolul I, secţiunea 1.20). Ea implică superordonări diferenţiale tari pentru care funcţia subordonată h este o funcţie stelată.

Teorema 5.1.3 [98] *Fie* $h(z,\zeta)$ *funcţie stelată în* U, *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$, *cu* $h(0,\zeta) = 0$. *Dacă* $p(z,\zeta) \in \mathcal{H}\zeta[0,1] \cap Q$ *şi* $zp'(z,\zeta)$ *este univalentă în* U, *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$, *atunci*

$$h(z,\zeta) \prec\prec zp(z,\zeta) \tag{5.1.5}$$

implică

$$q(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta),$$

unde

$$q(z,\zeta) = \int_0^z h(t,\zeta)t^{\gamma-1}dt. \tag{5.1.6}$$

Funcţia $q(z,\zeta) \in K\zeta$ *este cea mai bună subordonată.*

5.2 Cea mai bună subordonată a unei superordonări diferenţiale tari

În această secţiune studiem cea mai bună subordonată a unei anumite superordonări diferenţiale tari. Rezultatele sunt originale şi se regăsesc în lucrarea [99].

Pentru Ω_ζ domeniu în $\mathbb{C}$, considerăm relaţia de superordonare diferenţială tare

$$\Omega_\zeta \subset \{\varphi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta)\}, \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}. \tag{5.2.1}$$

Teorema 5.2.1 [99] *Fie* $\Omega_\zeta \in \mathbb{C}$, *fie* $q(\cdot,\zeta) \in \mathcal{H}\zeta[a,n]$ *şi fie* $\psi \in \Psi_n[\Omega_\zeta, q(\cdot,\zeta)]$. *Dacă* $p(\cdot,\zeta) \in Q(a)$ *şi* $\psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$, *atunci*

$$\Omega_\zeta \subset \{\psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta)\}, \tag{5.2.2}$$

implică

$$q(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta).$$

Considerăm situaţia specială în care $h(z,\zeta)$ este analitică în $U \times \overline{U}$ şi $h(U \times \overline{U}) = \Omega_\zeta \neq \mathbb{C}$, atunci Teorema 5.2.1 devine:

Teorema 5.2.2 [99] *Fie* $q(z,\zeta) \in \mathcal{H}\zeta[a,n]$, *fie* $h(z,\zeta)$ *analitică în* $U \times \overline{U}$ *şi fie* $\psi \in \Psi_n[h(z,\zeta), q(z,\zeta)]$. *Dacă* $p(z,\zeta) \in Q(a)$ *şi* $\psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$, *atunci*

$$h(z,\zeta) \prec\prec \psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta)$$

implică

$$q(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta).$$

Observaţia 5.2.1 Concluzia Teoremei 5.2.2 poate fi formulată în forma generalizată:

$$h(w(z),\zeta) \prec\prec \psi(p(w(z)), w(z)p'(w(z),\zeta), w^2(z)p''(w(z),\zeta); w(z),\zeta)$$

unde $w : U \to U$, $z \in U$, $\zeta \in \overline{U}$.

Rezultatul din Teorema 5.2.2 poate fi extins în următoarea teoremă, la acele situaţii în care comportamentul lui $q(z,\zeta)$ la frontiera lui U este necunoscut.

Teorema 5.2.3 [99] *Fie* $h(z,\zeta)$ *şi* $q(z,\zeta)$ *univalentă în* U *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$, *cu* $q(0,\zeta) = a$ *şi* $q_\rho(z,\zeta) = q(\rho z,\zeta)$ *iar* $h_\rho(z,\zeta) = h(\rho z,\zeta)$.
Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ *satisfăcând una dintre relaţiile*

(i) $\psi \in \Psi_n[h(z,\zeta), q_\rho(z,\zeta)]$ *pentru anumiţi* $\rho \in (0,1)$, *sau*

(ii) există $\rho_0 \in (0,1)$ *astfel încât* $\psi \in \Psi_n[h_\rho(z,\zeta), q_\rho(z,\zeta)]$ *pentru toţi* $\rho \in (\rho_0, 1)$.

Dacă $p(z,\zeta) \in \mathcal{H}\zeta[a,n]$, $\psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$ *şi*

$$h(z,\zeta) \prec\prec \psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta) \tag{5.2.3}$$

atunci

$$q(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta).$$

Următoarea teoremă furnizează existenţa celei mai bune subordonate a superordonării diferenţiale tari (5.2.3) pentru anumiţi ψ, şi mai oferă, de asemenea, o metodă pentru obţinerea celei mai bune subordonate pentru cazurile $n = 1$ şi $n > 1$.

Teorema 5.2.4 [99] *Fie* $h(z,\zeta)$ *univalentă în* U *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$ *şi fie* $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \times \overline{U} \to \mathbb{C}$. *Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$\psi(q(z,\zeta), zq'(z,\zeta), z^2q''(z,\zeta); z,\zeta) = h(z,\zeta), \quad z \in U,\ \zeta \in \overline{U} \tag{5.2.4}$$

are o soluţie $q(z,\zeta) \in Q(a)$. *Dacă* $\psi \in \Psi[h(z,\zeta), q(z,\zeta)]$, $p(z,\zeta) \in Q(a)$ *şi* $\psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta)$ *este univalentă în* U *pentru toţi* $\zeta \in \overline{U}$, *atunci*

$$h(z,\zeta) \prec\prec \psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta) \tag{5.2.5}$$

implică

$$q(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta)$$

şi $q(z,\zeta)$ *este cea mai bună subordonată.*

Din această teoremă vedem că problema găsirii celei mai bune subordonate a (5.2.5) se reduce la a arăta că ecuaţia diferenţială (5.2.4) are o soluţie univalentă, şi la a verifica dacă $\psi \in \Psi[h(z,\zeta), q(z,\zeta)]$.

Concluzia teoremei poate fi formulată în forma simetrică:

$$\psi(q(z,\zeta), zq'(z,\zeta), z^2q''(z,\zeta); z,\zeta) \prec\prec \psi(p(z,\zeta), zp'(z,\zeta), z^2p''(z,\zeta); z,\zeta) \tag{5.2.6}$$

implică

$$q(z,\zeta) \prec\prec p(z,\zeta).$$

5.3 Superordonări diferenţiale tari obţinute cu operatori cunoscuţi

În această secţiune obţinem noi superordonări diferenţiale tari folosind derivata Ruscheweyh şi operatorul diferenţial Sălăgean. Rezultatele sunt originale şi se regăsesc în lucrările [132] şi [133].

Teorema 5.3.1 [132] *Fie $q(z,\zeta)$ din clasa $K\zeta$ cu $q(0,\zeta) = 1$, şi $h(z,\zeta)$ definită prin*

$$h(z,\zeta) = q(z,\zeta) + \frac{1}{m+1} zq'(z,\zeta), \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}. \tag{5.3.1}$$

Fie $f \in A\zeta$ şi presupunem că $[R^{m+1}f(z,\zeta)]'$ funcţie univalentă şi $[R^m f(z,\zeta)]' \in \mathcal{H}\zeta[1,1] \cap Q$, unde $R^m f$ este operatorul definit în 1.12.2.
Dacă are loc superordonarea diferenţială tare

$$h(z,\zeta) \prec\prec [R^{m+1}f(z,\zeta)]', \tag{5.3.2}$$

atunci

$$q(z,\zeta) \prec\prec [R^m f(z,\zeta)]'$$

şi acesta este cel mai bun rezultat.

Teorema 5.3.2 [132] *Fie $h(z,\zeta)$ funcţie analitică în $U \times \overline{U}$, cu $h(0,\zeta) = 1$, $h'(0,\zeta) \neq 0$, care satisface inegalitatea*

$$Re[1 + \frac{zh''(z,\zeta)}{h'(z,\zeta)}] > -\frac{1}{2(m+1)}, m \geq 0. \tag{5.3.3}$$

Fie $f \in A\zeta$ şi presupunem că $[R^{m+1}f(z,\zeta)]'$ funcţie univalentă, şi $[R^m f(z,\zeta)]' \in \mathcal{H}\zeta[1,1] \cap Q$.
Dacă are loc superordonarea diferenţială tare

$$h(z,\zeta) \prec\prec [R^{m+1}f(z,\zeta)]', \tag{5.3.4}$$

atunci

$$q(z,\zeta) \prec\prec [R^m f(z,\zeta)]'$$

unde

$$q(z,\zeta) = \frac{m+1}{z^{m+1}} \int_0^z h(t,\zeta)t^m dt. \tag{5.3.5}$$

Funcţia $q(z,\zeta) \in K\zeta$ şi este cea mai bună subordonată.

Teorema 5.3.3 [133] *Fie $h(z,\zeta)$ funcţie analitică din $U \times \overline{U}$, cu $h(0,\zeta) = 1$, $h'(0,\zeta) \neq 0$, care satisface inegalitatea*

$$Re[1 + \frac{zh''(z,\zeta)}{h'(z,\zeta)}] > -\frac{1}{2}, \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}.$$

Fie $f \in A\zeta$ şi presupunem că $[I^{m+1}f(z,\zeta)]'$ funcţie univalentă, cu $[I^m f(z,\zeta)]' \in \mathcal{H}\zeta[1,1] \cap Q$. Dacă are loc superordonarea diferenţială tare

$$h(z,\zeta) \prec\prec [I^{m+1}f(z,\zeta)]', \tag{5.3.6}$$

atunci

$$q(z,\zeta) \prec\prec [I^m f(z,\zeta)]'$$

unde

$$q(z,\zeta) = \frac{1}{z}\int_0^z h(t,\zeta)dt.$$

Funcţia $q(z,\zeta) \in K\zeta$ şi este cea mai bună subordonată.

Teorema 5.3.4 [133] *Fie $q(z,\zeta) \in K\zeta$ şi $h(z,\zeta)$ definită prin*

$$h(z,\zeta) = q(z,\zeta) + zq'(z,\zeta), \quad z \in U, \zeta \in \overline{U}. \tag{5.3.7}$$

Fie $f \in A\zeta$ şi presupunem că $[I^m f(z,\zeta)]'$ funcţie univalentă, $\dfrac{I^m f(z,\zeta)}{z} \in \mathcal{H}\zeta[1,1] \cap Q$. Dacă are loc superordonarea diferenţială tare

$$h(z,\zeta) \prec\prec [I^m f(z,\zeta)]', \tag{5.3.8}$$

atunci

$$q(z,\zeta) \prec\prec \frac{I^m f(z,\zeta)}{z}$$

unde q este dată de (5.3.5).
Funcţia q este cea mai bună subordonată.

Capitolul 6

Funcţii armonice

Acest capitol, dedicat funcţiilor armonice, este structurat în cinci părţi, primele patru cuprind noţiuni şi rezultate de bază asupra transformărilor armonice, funcţiilor armonice, tratează reprezentarea canonică a unei funcţii armonice şi clasa S_H^0 a funcţiilor armonice univalente. Ultima secţiune conţine rezultate originale, aici definim şi investigăm o nouă clasă de funcţii armonice multivalente definită în discul unitate, sub anumite condiţii care implică un nou operator de derivare generalizat.

Rezultatele secţiunilor $6.1 - 6.4$ sunt cuprinse în lucrările cunoscute P. Duren [31], P. Hamburg, P. T. Mocanu, N. Negoescu [51], James Clunie şi Terry Sheil-Small [28].

6.1 Noţiuni de bază pentru funcţiile armonice. Transformări armonice

Definiţia 6.1.1 O funcţie reală $u(x, y)$, $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se numeşte armonică dacă satisface ecuaţia lui Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Definiţia 6.1.2 O transformare bijectivă $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ dintr-o regiune D a planului xOy într-o regiune Ω a planului uOv este o transformare armonică dacă ambele funcţii u, v sunt armonice.

Observaţia 6.1.1 Este convenabilă utilizarea notaţiei complexe

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

cu

$$w = f(z) = u(z) + iv(z).$$

O funcţie armonică de variabile complexe este o transformare armonică a unui domeniu $D \subset \mathbb{C}$ dacă şi numai dacă este univalentă în D.

Observaţia 6.1.2 Din ecuaţiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

şi din existenţa derivatelor superioare, reiese că fiecare funcţie analitică este armonică.

Definiţia 6.1.3 Jacobianul unei funcţii $f = u + iv$ este determinantul

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Dacă f este analitică, atunci Jacobianul său are forma:

$$J_f(z) = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2.$$

Pentru funcţiile analitice f, $J_f(z) \neq 0$ dacă şi numai dacă f este local univalentă în z. Hans Lewy arată în 1936 că această afirmaţie rămâne adevărată pentru transformările armonice.

Prin perspectiva teoremei lui Lewy, transformările armonice sunt ori cele care păstrează sensul (sau păstrează orientarea) cu $J_f(z) > 0$, ori cele care inversează sensul cu $J_f(z) < 0$ în tot domeniul D unde f este univalentă.

6.2 Reprezentarea canonică a unei funcţii armonice

Într-un domeniu simplu conex $D \subset \mathbb{C}$, o funcţie complexă armonică are reprezentarea canonică $f = h + \overline{g}$, unde h şi g sunt funcţii analitice din D. Această reprezentare este unică abstracţie făcând şi de o constantă aditivă.

Observaţia 6.2.1 Pentru o transformare armonică f a discului unitate U, este convenabilă alegerea constantei aditive aşa încât $g(0) = 0$.

Observaţia 6.2.2 Funcţia h este partea analitică a lui f iar funcţia $\overline{g}$ este partea coanalitică a lui f.

Observaţia 6.2.3 În orice domeniu simplu conex putem scrie $f = h + \bar{g}$, unde h şi g analitice în D. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie multivalentă şi să păstreze sensul în D este ca $|h'(z)| > |g'(z)|$, $z \in D$.

6.3 Clasa S_H^0 a funcţiilor armonice univalente

O funcţie $f = h + \overline{g}$ armonică în discul unitate deschis U poate fi exprimată sub forma

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad 0 \leq r < 1,$$

unde

$$h(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{1}^{\infty} \overline{a}_n z^n.$$

Definiţia 6.3.1 Se notează cu S_H clasa tuturor transformărilor armonice care păstrează sensul, definite pe discul unitate U, normate şi univalente.
Atunci o transformare f din S_H admite reprezentarea $f = h + \overline{g}$, unde

$$h(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

sunt funcţii analitice în U, cu $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $a_0 = b_0 = 0$ şi $a_1 = 1$.

Observaţia 6.3.1 S_H este o familie normală: fiecare şir de funcţii în S_H are un subşir care converge local uniform în U.

Definiţia 6.3.2 Clasa funcţiilor $f \in S_H$ cu $g'(0) = 0$ se notează cu S_H^0,

$$S_H^0 = \{f \in S_H : \ g'(0) = b_1 = 0\}.$$

Teorema 6.3.1 (Clunie şi Sheil Small) [28] *Clasa S_H^0 este o familie compactă şi normală.*

Observaţia 6.3.2 Această proprietate face ca S_H^0 să fie mai promiţătoare decât clasa S_H din punctul de vedere al corectei generalizări a familiei S a funcţiilor univalente analitice.

6.4 Funcţii armonice multivalente definite cu ajutorul unui nou operator de derivare

În această secţiune definim şi investigăm o nouă clasă de funcţii armonice multivalente definită în discul unitate, sub anumite condiţii care implică un nou operator diferenţial generalizat. Sunt stabilite condiţii la frontieră asupra coeficienţilor, delimitări la frontieră, combinaţii convexe şi puncte de extrem. În plus, obţinem proprietăţi de integralitate şi condiţii de convoluţie, o teoremă de reprezentare, o aplicaţie la (n, η)-vecinătăţi.

Rezultatele sunt originale, obţinute prin colaborare, şi se regăsesc în lucrările [24], respectiv [25].

Notăm cu $S_{\mathcal{H}}(p, n)$, $(p, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\})$, clasa funcţiilor $f = h + \bar{g}$, care sunt armonice multivalente şi păstrează sensul în U cu $f(0) = f_z(0) - 1 = 0$. Atunci pentru $f = h + \bar{g} \in S_{\mathcal{H}}(p, n)$ putem exprima funcţiile analitice h şi g ca

$$h(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=p+n-1}^{\infty} b_k z^k, \quad |b_{p+n-1}| < 1. \tag{6.4.1}$$

Notăm cu $\tilde{S}_{\mathcal{H}}(p, n, m)$, $(p, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0 \cup \{0\})$, familia de funcţii $f_m = h + \bar{g}_m$ care sunt armonice în D cu normalizarea

$$h(z) = z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty} |a_k| z^k, \quad g_m(z) = (-1)^m \sum_{k=p+n-1}^{\infty} |b_k| z^k, \quad |b_{p+n-1}| < 1. \tag{6.4.2}$$

***1.* Condiţii la frontieră asupra coeficienţilor pentru noile clase $AL_{\mathcal{H}}(p, m, \delta, \alpha, \lambda, l)$ şi $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p, m, \delta, \alpha, \lambda, l)$**

Pentru început propunem un nou operator diferenţial generalizat după cum urmează.

Definiţia 6.4.1 [24], [25] Fie $H(U)$ clasa funcţiilor analitice din discul unitate $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, şi fie $\mathcal{A}(p)$ subclasa funcţiilor din $H(U)$ de forma

$$h(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k.$$

Pentru $m \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \geq 0$, $\delta \in \mathbb{N}_0$, $l \geq 0$, definim operatorul diferenţial generalizat $I^m_{\lambda,\delta}(p,l)$ pe $\mathcal{A}(p)$ prin următoarea serie infinită

$$I^m_{\lambda,\delta}(p,l)h(z) = (p+l)^m z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} [p + \lambda(k-p) + l]^m C(\delta,k) a_k z^k, \tag{6.4.3}$$

unde

$$C(\delta,k) = \left(\begin{array}{c} k+\delta-1 \\ \delta \end{array} \right) = \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)\Gamma(\delta+1)}. \tag{6.4.4}$$

Definiţia 6.4.2 [24], [25] Fie $f \in S_{\mathcal{H}}(p,n)$, $p \in \mathbb{N}$. Folosind operatorul (6.4.3) pentru $f = h + \bar{g}$ dată prin (6.4.1), definim operatorul diferenţial aplicat funcţiei f ca fiind

$$I^m_{\lambda,\delta}(p,l)f(z) = I^m_{\lambda,\delta}(p,l)h(z) + (-1)^m \overline{I^m_{\lambda,\delta}(p,l)g(z)} \tag{6.4.5}$$

unde

$$I^m_{\lambda,\delta}(p,l)h(z) = (p+l)^m z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} [p + \lambda(k-p) + l]^m C(\delta,k) a_k z^k \tag{6.4.6}$$

şi

$$I^m_{\lambda,\delta}(p,l)g(z) = \sum_{k=p+n-1}^{\infty} [p + \lambda(k-p) + l]^m C(\delta,k) b_k z^k. \tag{6.4.7}$$

În următoarele definiţii introducem noi clase de funcţii armonice multivalente prin intermediul operatorului diferenţial generalizat (6.4.5).

Definiţia 6.4.3 [24], [25] Spunem că o funcţie $f \in S_{\mathcal{H}}(p,n)$ este în clasa $AL_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ dacă

$$\frac{1}{p+l} \mathrm{Re} \left\{ \frac{I^{m+1}_{\lambda,\delta}(p,l)f(z)}{I^m_{\lambda,\delta}(p,l)f(z)} \right\} \geq \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1, \tag{6.4.8}$$

unde $I^m_{\lambda,\delta} f$ este definită prin (6.4.5), pentru $m \in \mathbb{N}_0$.

În final, definim subclasa

$$\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l) \equiv AL_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l) \cap \tilde{S}_{\mathcal{H}}(p,n,m). \tag{6.4.9}$$

În această secţiune vom da condiţii suficiente pentru funcţiile $f = h + \bar{g}$, unde h şi g sunt date de relaţia (6.4.1), să fie în clasa $AL_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$. Se arată, de asemenea, că aceste condiţii asupra coeficienţilor sunt necesare pentru funcţii din clasa $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$. Sunt obţinute delimitări la frontieră, teoreme de reprezentare, o proprietate integrală şi condiţii de convoluţie pentru subclasa $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$. În final, vom da o aplicaţie pentru vecinătăţi.

Mai întâi, în următoarea teoremă, obţinem condiţii suficiente pentru ca funcţiile să fie din clasa $AL_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$.

Teorema 6.4.1 [24], [25] *Fie $f = h + \bar{g}$, cu h şi g date prin relaţia (6.4.1). Dacă*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} \frac{[(p+l)(1-\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|a_k|+ \tag{6.4.10}$$

$$+\sum_{k=p+n-1}^{\infty} \frac{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|b_k| \leq 1,$$

cu $\lambda n \geq \alpha(p+l)$,
unde

$$d_{p,k}(m,\lambda,l) = [p+\lambda(k-p)+l]^m \tag{6.4.11}$$

atunci $f \in AL_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$.

Următoarea teoremă oferă condiţii suficiente pentru ca funcţiile să fie din clasa $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$.

Teorema 6.4.2 [24] *Fie funcţiile $f_m = h + \bar{g}_m$ date prin relaţia (6.4.2). Atunci $f_m \in \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ dacă şi numai dacă*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} \frac{[(p+l)(1-\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|a_k|+ \tag{6.4.12}$$

$$+\sum_{k=p+n-1}^{\infty} \frac{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|b_k| \leq 1,$$

unde $\lambda n \geq \alpha(p+l)$, $0 \leq \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \geq 0$ şi $d_{p,k}(m,\lambda,l)$ este dată în (6.4.11).

2. **Delimitări la frontieră**

Următoarele teoreme oferă delimitări la frontieră pentru funcţiile din $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$, care conduc la un rezultat de acoperire pentru această clasă.

Teorema 6.4.3 [24] *Fie $f \in \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$, cu $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda n \geq \alpha(p+l)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \geq 0$. Atunci pentru $|z| = r < 1$ se obţine*

$$|f(z)| \leq (1+|b_{p+n-1}|r^{n-1})r^p + \frac{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}{[(p+l)(1-\alpha)+\lambda n]d_{p,n+p}(m,\lambda,l)C(\delta,n+p)} \cdot \tag{6.4.13}$$

$$\cdot \left\{1 - \frac{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(n-1)]d_{p,n+p-1}(m,\lambda,l)C(\delta,n+p-1)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|b_{p+n-1}|\right\} r^{n+p}$$

şi

$$|f(z)| \geq (1-|b_{p+n-1}|r^{n-1})r^p - \frac{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}{[(p+l)(1-\alpha)+\lambda n]d_{p,n+p}(m,\lambda,l)C(\delta,n+p)} \cdot$$

$$\cdot \left\{1 - \frac{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(n-1)]d_{p,n+p-1}(m,\lambda,l)C(\delta,n+p-1)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|b_{p+n-1}|\right\} r^{n+p}.$$

3. **Combinaţii convexe şi puncte de extrem**

În această secţiune, arătăm cum clasa $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ este închisă sub combinaţia convexă a membrilor ei.

Pentru $i=1,2,3,...$, fie funcţiile $f_{m_i}(z)$

$$f_{m_i}(z)=z^p-\sum_{k=p+n}^{\infty}|a_{k,i}|z^k+(-1)^m\sum_{k=p+n-1}^{\infty}|b_{k,i}|\bar{z}^k. \tag{6.4.14}$$

Teorema 6.4.4 [25] *Clasa $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ este închisă sub o combinaţie convexă.*

Mai departe, vom determina o teoremă de reprezentare pentru funcţiile din $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$, şi de asemenea vom stabili punctele de extrem ale înfăşurătorii convexe a mulţimii $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$, notată cu $clco\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$.

Teorema 6.4.5 [25] *Fie funcţiile $f_m(z)$ definite prin relaţia (6.4.2). Atunci $f_m(z)\in\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ dacă şi numai dacă $f_m(z)$ poate fi exprimată prin*

$$f_m(z)=X_ph_p(z)+\sum_{k=p+n}^{\infty}X_kh_k(z)+\sum_{k=p+n-1}^{\infty}Y_kg_{m_k}(z), \tag{6.4.15}$$

unde $h_p(z)=z^p$,

$$h_k(z)=z^p-\frac{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}{[(p+l)(1-\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}z^k, \tag{6.4.16}$$
$$k=p+n,p+n+1,...,$$

şi

$$g_{m_k}(z)=z^p+(-1)^m\frac{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}\bar{z}^k, \tag{6.4.17}$$
$$k=p+n-1,p+n,...,$$

cu $X_k\geq 0, Y_k\geq 0, X_p=1-\sum_{k=p+n}^{\infty}X_k-\sum_{k=p+n-1}^{\infty}Y_k$.

În particular, punctele de extrem ale $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ sunt $\{h_k\}$ şi $\{g_{m_k}\}$.

4. **Proprietăţi de integralitate şi condiţii de convoluţie**

În această secţiune vom examina proprietăţile de închidere ale clasei $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ sub operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston, şi de asemenea proprietăţile de convoluţie ale acestei clase.

Pentru $f=h+\bar{g}$ dată prin relaţia (6.4.1), definim operatorul integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston aplicat funcţiei f ca fiind

$$\mathcal{L}_c(f(z))=\mathcal{L}_c(h(z))+\overline{\mathcal{L}_c(g(z))},\quad c>-p, \tag{6.4.18}$$

unde

$$\mathcal{L}_c(h(z))=\frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1}h(t)dt$$

şi

$$\mathcal{L}_c(g(z)) = \frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1}g(t)dt.$$

Punând $g = 0$ în relaţia (6.4.18), obţinem definiţia operatorului integral generalizat Bernardi-Libera-Livingston pentru funcţiile analitice (vezi [61], [62]).

Teorema 6.4.6 [25] *Fie* $f \in \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$. *Atunci* $\mathcal{L}_c(f)$ *aparţine clasei* $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$.

Pentru funcţiile armonice

$$f_1(z) = z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty}|a_k|z^k + (-1)^m\sum_{k=p+n-1}^{\infty}|b_k|\bar{z}^k,\ |b_{p+n-1}| < 1, \tag{6.4.19}$$

şi

$$f_2(z) = z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty}|A_k|z^k + (-1)^m\sum_{k=p+n-1}^{\infty}|B_k|\bar{z}^k,\ |B_{p+n-1}| < 1, \tag{6.4.20}$$

definim convolţia lui f_1 şi f_2 ca fiind

$$(f_1 * f_2)(z) = f_1(z) * f_2(z) = z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty}|a_kA_k|z^k + (-1)^m\sum_{k=p+n-1}^{\infty}|b_kB_k|\bar{z}^k.$$

În următoarea teoremă, examinăm proprietăţile de convoluţie ale clasei $\widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$.

Teorema 6.4.7 [25] *Pentru* $0 \le \beta \le \alpha < 1$ *fie* $f_1 \in \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$ *şi* $f_2 \in \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\beta,\lambda,l)$. *Atunci* $f_1 * f_2 \in \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l) \subset \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\beta,\lambda,l)$.

***5.* O aplicaţie la (n,η)-vecinătăţi**

Definim o (n,η)-vecinătate generalizată a funcţiei f dată în (6.4.2), ca fiind mulţimea

$$N_{n,\eta}(f) = \Big\{F_m(z) \in \tilde{S}_{\mathcal{H}}(p,n,m) :$$

$$\sum_{k=p+n}^{\infty}\frac{[(p+l)(1-\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|a_k - A_k| +$$

$$+\sum_{k=p+n-1}^{\infty}\frac{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|b_k - B_k| \le \eta\Big\}$$

unde $F_m(z) = z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty}|A_k|z^k + (-1)^m\sum_{k=p+n-1}^{\infty}|B_k|\bar{z}^k$.

Teorema 6.4.8 [25] *Fie* $f_m = h + \bar{g}_m$ *dată prin relaţia (6.4.2). Dacă funcţiile* f_m *satisfac condiţiile*

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k\cdot\Big[\frac{[(p+l)(1-\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|a_k| + \tag{6.4.21}$$

$$+\frac{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(k-p)]d_{p,k}(m,\lambda,l)C(\delta,k)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|b_k|\Big] \le 1 - U^{\alpha}_{p,\delta}(m,\lambda,l)$$

şi

$$\eta \leq \frac{p+n-\alpha-1}{p+n-\alpha}\left(1-U_{p,\delta}^{\alpha}(m,\lambda,l)\right), \tag{6.4.22}$$

cu $\lambda n \geq \alpha(p+l)$, *unde*

$$U_{p,\delta}^{\alpha}(m,\lambda,l) = \frac{[(p+l)(1+\alpha)+\lambda(n-1)]d_{p,p+n-1}(m,\lambda,l)C(\delta,p+n-1)}{(p+l)^{m+1}(1-\alpha)}|b_{p+n-1}|$$

atunci $N_{n,\eta}(f) \subset \widetilde{AL}_{\mathcal{H}}(p,m,\delta,\alpha,\lambda,l)$.

Bibliografie

[1] M. Acu, *Some subclasses of $\alpha-$uniformly convex functions*, Acta Mathematica, 21(2005)

[2] M. Acu, *Operatorul integral Libera-Pascu şi proprietăţile acestuia...*, Ed. Univ. Lucian Blaga, Sibiu,(2005), 45-51

[3] L. V. Ahlfors, *Sufficient conditions for quasiconformal extension*, Proc. 1973, Conf. Univ. of Maryland, Ann. of Math. Studies, 79, pp. 23-29.

[4] H. Al-Amiri, P. T. Mocanu, *Some simple criteria of starlikeness and convexity for meromorphic functions*, Mathematica(Cluj), 37(60)(1995), 11-21.

[5] F. M. Al-Oboudi, *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Inter. J. of Math. and Mathematical Sci., 27(2004), 1429-1436.

[6] K. Al-Shaqsi, M. Darus, *An operator defined by convolution involving polylogarithms functions*, Journal of Math. and Statistics, **4**(1)(2008), 46-50.

[7] K. Al-Shaqsi, M. Darus, *On Harmonic Functions Defined by Derivative Operator*, Journal of Inequalities and Applications, vol. 2008, Article ID 263413, doi: 10.1155/2008/263413.

[8] J. W. Alexander, *Function which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17(1915), 12-22.

[9] J. A. Antonino and S. Romaguera, *Strong differential subordination to Briot-Bouquet differential equations*, Journal of Differential Equations, 114(1994), 101-105.

[10] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math., 255(1972), 23-43.

[11] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheits-Kriterion*, Math. Ann. 202, 4(1973), 321-335.

[12] S. D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans.Amer.Math.Soc., 135(1969), 429 - 446.

[13] L. Bieberbach, *Über einige Extremal probleme im Gebiete der Konformen Abbildung*, Math. Ann., 77(1916), 153-172.

[14] L. Bieberbach, *Über die Koeffizientem derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss Akad. Wiss. Sitzungsb., 1916, 940-955.

[15] D. Blezu, *On the $n-$uniformly class to convex functions with respect to a convex domain*, General Mathematics, Vol. 9, No. 3-4 (2001)

[16] L. DeBranges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154(1985), 137-152.

[17] T. Bulboacă, *Classes of first-order differential subordinations*, Mathematica(Cluj), 29(52), 1(1987), 11-17.

[18] T. Bulboacă, *Differential subordinations and superordinations. Recent results*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005, 226-229.

[19] C. Carathéodory, *Über den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene wertw nicht annehmen*, Math., Ann., 64(1907), 95-115.

[20] G. Călugăreanu, *Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle*, C.R. Acad. Sci. Paris, 193(1931), 1150-1153.

[21] G. Călugăreanu, *Sur les condition nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle*, Mathematica, 6(1932), 75-79.

[22] G. Călugăreanu, *Elemente de teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1963.

[23] A. Cătaş, *On certain analytic functions with positive real part*, Libertas Math., Tomus XXIX (2009), 117-122

[24] A. Cătaş, R. Şendruţiu, Z.G. Wang, *On harmonic multivalent functions defined by a new derivative operator*, Applied Mathematics Letters, trimisa spre publicare (2011).

[25] A. Cătaş, R. Şendruţiu, S. Bulut, *Certain subclass of harmonic multivalent functions defined by derivative operator*, Selecta Mathematica, trimisa spre publicare (2011).

[26] Z. Charzyński, M. Schiffer, *A geometric proof of the Bieberbach conjecture for four coefficient*, Scripta Math., 25(1960), 173-181

[27] Z. Charzyński, M. Schiffer, *A new proof of the Bieberbach conjecture for the coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 5(1960), 187-193

[28] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic Univalent Functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn, Ser. A I. Math. **9**(1984), 3-25.

[29] P. Curt, *Capitole speciale de teoria geometrică a funcţiilor de mai multe variabile complexe*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2001.

[30] M. Darus, R. W. Ibrahim, *On new classes of univalent harmonic functions defined by generalized differential operator*, Acta Universitatis Apulensis, **17**(2009), 1-9.

[31] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge University Press, 2004, ISBN 05216412173

[32] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, (1983).

[33] P. J. Eenigenburg, S. S. Miller, P. T. Mocanu, M. O. Reade, *On a Briot-Bouquet differential subordination*, General Inequalities, 3, I.S.N.M., vol.64, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983, 339-348.

[34] B. A. Frasin, *On a differential inequality*, An. Univ. Oradea Fasc. Math., 14(2007), 81-87.

[35] S. Friedland, *On a conjecture of Robertson*, Arch. Rational Mech. Anal., 37(1970), 255-261.

[36] P. R. Garabedian, M. Schiffer *A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, J. Rational Mech. Anal., 4(1955), 427-465.

[37] G. M. Goluzin, *On the majorization principle in function theory* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 42(1935), 647-650.

[38] G. M. Goluzin, *Zur Theorie der schlichten konformen Abbildungen*, Mat. Sbornik, N.S., 42(1935), 169-190.

[39] G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Trans. Math. Monographs, vol.26, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.

[40] A.W. Goodman, *Univalent Functions*, I-II, Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, (1983).

[41] A. W. Goodman, *On the Schwarz-Cristoffel transformation and p-valent functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 68,(1950), 204-223.

[42] A. W. Goodman, *On uniformly starlike function*, J.Math.Anal.Appl., 155,(1991), 364-370.

[43] A.W.Goodman, *On uniformly convex function*, Ann. Polon. Math., LVIII(1991), 82-92.

[44] G. S. Goodman, *Univalent functions and optimal control*, Thesis, Stanford University, 1968

[45] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker, Inc., New-York-Basel, 2003.

[46] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and parametric representation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., 281(2003), 425-438.

[47] T. H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math., (2) 16(1914-1915), 72-76.

[48] H. Grunski, *Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung*, Jahreesber. Deutsch. Math. Ver., 43(1933), 140-142.

[49] D. J. Hallenbeck, T. H. MacGregor, *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Melbourn, 1984.

[50] D. J. Hallenbeck, S. Ruschweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 52(1975), 191-195.

[51] P. Hamburg, P. T. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză matematică (Funcţii complexe)*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1982.

[52] A. Hurwitz, *Über die Anwendung der eliptischer Modul-functionen auf einen setz der allgemeinen Functionentheorie*, Vjscher Naturforsckala. Ges Zürich, 49(1904), 242-253.

[53] I. S. Jack, *Functions starlike and convex of order* α, J. London Math. Soc., 3(1971), 469-474.

[54] J. M. Jahangiri, *Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklowdowska Sect. A, **52**(1998), 57-66.

[55] J. M. Jahangiri, G. Murugusundaramoorthy and K. Vijaya *Sălăgean type harmonic univalent functions* South. J. Pure Appl. Math., **2**(2002), 77-82.

[56] W. Kaplan, *Close-to-convex schlich functions*, Michigan Math. J., 1, 2(1952), 169-185.

[57] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys., 1907, 191-210.

[58] G. Kohr, P. Liczberski, *Univalent mappings and several complex variables*, Cluj University Press, Cluj Napoca, Romania.

[59] G. Kohr, P. T. Mocanu, *Capitole Speciale de Analiză Complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005.

[60] P. P. Kufarev, *On one-parameter families of analytic functions*, Mat. Sb., 13(55)(1943), 87-118

[61] R. J. Libera, *Some classes of regular univalent functions*, Proc. Am. Math. Soc. 63(1965), 755-758.

[62] A. E. Livingston, *On the radius of univalence of certain analytic functions*, Proc. Am. Math. Soc. 17(1966), 352-357.

[63] K. Löwner, *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitsckreises* $|z| < 1$*, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden*, S.B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Brichte, 69(1917), 89-106.

[64] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann., 89(1923), 103-121.

[65] W. Ma, D. Minda, *Uniformly convex functions*, Ann. Polon. Math., **57**(1992), no.2, 165-175.

[66] T. H. Mac Gregor, *The radius of convexity for starlike functions of order* $\frac{1}{2}$, Proc. Amer. Math. Soc., 14(1963), 71-76.

[67] D. Magdas, *On* $\alpha-$*uniformly convex functions*, Mathematica, Tome 43(66), No. 2(2001), 211 - 218.

[68] A. Marx, *Untersuchungen über schlichte Abbildungen*, Math. Ann., 107(1932-1933), 40-67.

[69] I. M. Milin, *Univalent Functions and Orthonormal Systems*, Izdat. Nauka, Moscow, 1971.

[70] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65(1978), 298-305.

[71] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michigan Math. J., 28(1981), 157-171.

[72] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *On some classes of first-order differential subordinations*, Michig. Math. J., 32(1985), 185-195.

[73] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*, J. Diff. Eqn. 67(1987), 199-211.

[74] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *The theory and applications of second-order differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 34, 4(1989), 3-33.

[75] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential equations and differential subordinations*, Complex Variables, 33(1997), 217-237.

[76] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential subordinations: Theory and applications*, Marcel Dekker Inc. New York, Basel, vol. 225, 2000.

[77] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, vol.48, no. 10, 2003, 815-826.

[78] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Univalent solution of Briot-Bouquet differential equations*, Journal of Differential Equations, 56(1985), 297 - 308.

[79] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential superordinations and sandwich theorems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.329, Issue 1, (2007), 327-335

[80] S. S. Miller, P. T. Mocanu, M. O. Reade, *All α-convex functions are starlike*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 17, 9(1972), 1395-1397.

[81] S. S. Miller, P. T. Mocanu, M. O. Reade, *Bazilević functions and generalized convexity*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19, 2(1974), 213-224.

[82] P. T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la representation conforme*, Mathematica(Cluj), 11(34), 1969, 127-133.

[83] P. T. Mocanu, *Funcţii complexe*, Litografia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1972.

[84] P. T. Mocanu, *On a class of first order differential subordinations*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math. Res. Sem., Seminar on Mathematical Analysis, Preprint 7, 37-46(1991).

[85] P. T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr. Şt. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj, 1999.

[86] R. Nevanlinna, *Über die schlichten Abbildungen des Einheitkreises*, Översikt av Finska Vet. Soc. Förh (A), no.7, 62(1920), 1-14.

[87] R. Nevanlinna, *Über die Konforme Abbildung Sterngebieten*, Översikt av Finska Vet. Soc. Förh (A), no. 6, 63(1921).

[88] Om P. Ahuja and J. M. Jahangiri, *Multivalent harmonic starlike functions with missing coefficients*, Math. Sci. Res. J., **7**(9)(2003), 347-352.

[89] G. I. Oros, *On a class of holomorphic functions defined by the Ruscheweyh derivative*, Int. J. Math. and Math. Sci, **65** (2003), 4139-4144.

[90] G. I. Oros, *Strong differential superordination*, Acta Universitatis Apulensis, **19**(2009), 110-116.

[91] G. I. Oros, *An application of the subordination chains* Fractional Calculus Applied Analysis, Volume 13, Number 5 (2010), pp. 521-530.

[92] G. I. Oros, *On a new strong differential subordination* (to appear)

[93] G. I. Oros, Gh. Oros, *Strong differential subordination*, Turkish Journal of Mathematics, **33**(2009), 249-257.

[94] G. I. Oros, Gh. Oros, *Second order nonlinear strong differential subordinations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **16**(2009), 171-178.

[95] Gh. Oros, *Briot-Bouquet strong differential superordination and sandwich theorems*, Math. Reports, Vol. 12(62), **3**(2010), 277-283.

[96] Gh. Oros, G. I. Oros, *Differential superordination defined by Sălăgean operator*, General Mathematics, Sibiu, vol. 12, no. **4**(2004), 3-10.

[97] Gh. Oros, G. I. Oros, *Differential superordination defined by Ruscheweyh derivative*, Hokkaido Mathematical Journal, **36**, No.**1**(2006), 1-8.

[98] Gh. Oros, R. Şendruţiu, A.O. Tăut, *First-order strong differential superordinations*, Mathematical Reports, trimisa spre publicare (2011).

[99] Gh. Oros, R. Şendruţiu, A.O. Tăut, *On a new best subordinant of the strong differential superordination*, Complex Variables and Elliptic Equations, trimisa spre publicare (2011).

[100] S. Ozaki, M. Nunokawa, *The Schwartzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 33(2) (1972), 392-394.

[101] N. N. Pascu, *Ann improvement of Becker's univalence criterion*, Proceedings of the Commemorative Session Simion Stoilov, Braşov (1987), 43-48.

[102] R. N. Pederson, M. Schiffer *A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 31(1968-1969), 331-351.

[103] R. N. Pederson, M. Schiffer *A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal., 45(1972), 161-193.

[104] V. Pescar, *A new generalization of Ahlfors and Becker's criterion of univalence*, Bull. Malaysian Math. Soc., Second Series, 19(1996), 53-54.

[105] V. Pescar, *On univalence of certain integral operators*, Indian J. Pure Appl. Math., XXXI, (2000), 975-978

[106] V. Pescar, *Simple sufficient conditions for univalence*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, vol. XLIX, No. 2, (2004), pp. 95-98.

[107] Ch. Pommerenke, *Über die subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math., 218(1965), 159-173.

[108] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vanderhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[109] M. S. Robertson, *A remark on the odd schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc., 42(1936), 366-370.

[110] M. S. Robertson, *Analytic functions starlike in one direction*, Amer. J. Math., 58(1936), 465-472.

[111] R. M. Robinson, *Univalent majorants*, Trans. Amer. Math. Soc., 61(1947), 1-35.

[112] F. Ronning, *On starlike functions associated with parabolic regions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, 45(14), (1991), 117-122.

[113] F. Ronning, *Uniformly convex functions with a corresponding class of starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118**(1993), no.1, 190-196.

[114] St. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 49(1975), 109 - 115.

[115] K. Sakaguchi, *Anote on p-valent functions*, J. Math. Soc. Japan, 14(1962), 312-321.

[116] Gr. Şt. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1013(1983), 362-372.

[117] Gr. Şt. Sălăgean, *Geometria planului complex*, Ed. Promedia Plus, Cluj, 1997.

[118] Gr. Şt. Sălăgean, *On some classes of univalent functions*, Seminar of geometric function theory, Cluj-Napoca, (1983).

[119] Sibel Yalcin, *A new class of Sălăgean-type harmonic univalent functions* Appl. Math. Letters, **18**(2005), 191-198.

[120] S. Stoilov, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol.I, Editura Academiei, Bucureşti, 1954.

[121] S. Stoilov, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, vol.II, Editura Academiei, Bucureşti, 1958.

[122] E. Strohhäcker, *Beiträge zur Theorie der schlichten Functionen*, Math. Z., 37(1933), 356-380.

[123] E. Study, *Vorlesungen über ausgenwöhle Gegenstönde der Geometrie*, Zweites Helft Konforme Abbildung einfach Zussamarenhögender Bereiche, Leipzig und Berlin, 1913.

[124] T. J. Suffridge, *Some remarks on convex maps of the unit disk*, Duke Math. J., 37(1970), 775-777.

[125] R. Şendruţiu, *On certain functions with positive real part*, Journal of Mathematics and Applications, Poland, ISSN 1733-6775, 32(2010), 85-90.

[126] R. Şendruţiu, *On a certain differential inequality*, ROMAI Journal, vol.5, 2(2009), 163-167.

[127] R. Şendruţiu, *On a certain differential inequality I*, Analele Universitatii din Oradea, Fasc. Mat., 17(2010), no.1, 159-162, (Zblpre 05730228)

[128] R. Şendruţiu, *A note on certain inequalities for univalent functions*, ROMAI Journal, acceptată, în curs de publicare (2011).

[129] R. Şendruţiu, *Strong differential subordinations obtained by the medium of an integral operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 3(2010), 197-205

[130] R. Şendruţiu, *Strong differential subordinations obtained by Ruscheweyh operator*, JOCAAA, acceptată, în curs de publicare (2011).

[131] R. Şendruţiu, *Subclasses of $\alpha-$uniformly convex functions obtained by using an integral operator and the theory of strong differential subordinations*, General Mathematics, acceptată, în curs de publicare (2011).

[132] R. Şendruţiu, *Strong differential superordinations obtained by Ruscheweyh derivative*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, trimisa spre publicare (2011).

[133] R. Şendruţiu, *Strong differential superordinations obtained by Sălăgean operator*, General Mathematics, acceptata spre publicare (2011).

[134] R. Şendruţiu, G. I. Oros, *Sufficient conditions for univalence of certain integral operators*, Acta Universitatis Apulensis, trimisa spre publicare (2011).

[135] R. Şendruţiu, G. I. Oros, Gh. Oros, *Simple sufficient conditions for univalence of some integral operators*, Mathematics Fascicola, Annals of Oradea University, în curs de publicare vol.19(2012).

[136] A. O. Tăut, G.I. Oros, R. Şendruţiu, *On a class of univalent functions defined by Sălăgean differential operator*, Banach Journal of Mathematical Analysis, Volume 3, No.1, 2009, pp.61-67